

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Estudio teórico y experimental de un freno magnético

Autor: Pablo José Sau Molina
Tutor: Gabriel Cano Gómez

Dpto. Dpto. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Estudio teórico y experimental de un freno magnético

Autor:
Pablo José Sau Molina

Tutor:
Gabriel Cano Gómez
Profesor titular

Dpto. de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2019

Trabajo Fin de Grado: Estudio teórico y experimental de un freno magnético

Autor: Pablo José Sau Molina
Tutor: Gabriel Cano Gómez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A mi familia
A mis maestros

Agradecimientos

Este trabajo pone fin a una dura pero constructiva etapa como estudiante. Mi curiosidad sobre el electromagnetismo y dado que no estaba satisfecho con la profundidad aprendida en la carrera respecto a esta ciencia, junto al apasionante trabajo que realiza mi padre en el diagnóstico por resonancia magnética, fueron las influencias fundamentales que me llevaron a emprender a este trabajo, que nada o poco tiene que ver con la rama de mecánica máquinas que elegí durante el grado, y debo decir que estoy muy satisfecho con los conocimientos que he adquirido al enfrentarme a este problema.

Quisiera agradecer en primerísimo lugar a mi familia por su incondicional apoyo, el cual ha sido pilar fundamental para poder llegar al final de este camino. Gracias a mi padre, madre y hermano, por estar en los buenos y en los muy malos momentos, no hay palabras para expresar tal agradecimiento. Gracias a mis abuelos que velaron por mí cada día, un orgullo y una alegría poder seguir contando con ellos, que siempre están aconsejándome y apoyándome con todo su amor incondicional.

También quiero agradecerlo a mis buenos amigos amigos que me han apoyado tanto en la compañía de las largas noches de estudio en la biblioteca nocturna (“el bunker”) de la Facultad de Derecho, en especial a dos tocayos míos, hasta a los que me han apoyado en la distancia en desde otras partes del mundo

No podría dejarme atrás a una persona muy especial que me ha acompañado día a día en el tramo final de esta dura etapa, con nuestros más y menos, pero que sin duda ha sido un increíble motor para continuar hacia delante y una bonita luz en este camino.

En particular, muchas gracias al Dr. Gabriel Cano Gómez, mi tutor, quién con su paciencia y sus conocimientos me ha guiado para poder llegar a finalizar este trabajo con éxito, además de lo que he tenido oportunidad de aprender de él, que lo considero incluso más importante que el trabajo en sí.

Espero que este trabajo y la finalización de esta etapa me ayuden a “reducir la inerradicable incertidumbre del por hacer”.

*Pablo José Sau Molina
Sevilla, 2019*

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Grado tiene como propósito analizar el fenómeno de frenado magnético que experimenta un imán con forma anular que cae por el exterior de un tubo de un material conductor. En virtud de las leyes de inducción electromagnética, el movimiento relativo del imán respecto a un conductor genera en el mismo unas corrientes eléctricas denominadas corrientes de Foucault o corrientes torbellino (“eddy current” en inglés), que a su vez llevan asociado un campo magnético que se opone al campo magnético del imán, lo que produce una fuerza de frenado que se opone a la caída libre que experimenta el imán. El objetivo de este trabajo es modelar esta fuerza de frenado con una constante de fricción magnética denominada η , que se obtendrá analíticamente por métodos de fuerzas y métodos energéticos para compararse posteriormente con el obtenido experimentalmente.

Para analizar esta fuerza que se opone a la caída libre del imán, comenzaremos con una primera aproximación analítica, considerando el imán como un dipolo puntual que cae por el centro del tubo. Posteriormente se realizará un análisis numérico con un modelo que genere el campo magnético equivalente a su forma de anillo. Realizado esto, se compararán estos modelos con respecto a las medidas experimentales para discernir cuánto se aproxima al modelo físico real, teniendo en cuenta las hipótesis simplificadoras adoptadas.

Todo ello lo realizaremos por un lado con la ayuda del potencial vector magnético \vec{A} , que nos simplificará de sobremanera las operaciones, por otro utilizando integrales elípticas en lugar de desarrollos multipolares, y por último usando la equivalencia entre corrientes eléctricas e imanes.

Abstract

The purpose of this Final Degree Project is to analyze the phenomenon of magnetic braking experienced by an annular shaped magnet that falls outside a tube of a conductive material. Under the laws of electromagnetic induction, the relative movement of the magnet with respect to a conductor generates electrical currents called Foucault's currents or eddy, which in turn have an associated magnetic field which opposes the magnetic field of the magnet, which produces a braking force that opposes the free fall experienced by the magnet. The objective of this work is to model this braking force with a magnetic friction constant called η , which will be obtained analytically by force methods and energy methods to be compared later with that obtained experimentally.

To analyze this force that opposes the free fall of the magnet, we will begin with a first analytical approach, considering the magnet as a point dipole that falls through the center of the tube. Subsequently, a numerical analysis will be carried out with a model that generates the magnetic field equivalent to its ring shape. Once this is done, these models will be compared with respect to the experimental measures to discern how close to the real physical model, taking into account the simplifying hypotheses adopted.

All this will be done on the one hand with the help of the potential magnetic vector \vec{A} , which will greatly simplify operations, on the other using elliptical integrals instead of multipolar developments, and finally using the equivalence between electric currents and magnets.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xii
Abstract	xiv
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
1 Introducción	1
1.1 <i>Fundamento teórico</i>	3
2 Modelado del sistema	10
2.1 <i>Modelado del imán</i>	11
2.1.1 Espira de corriente circular: potencial vector	11
2.1.2 Imán con volumen y altura	13
2.1.3 Imán con geometría anular	15
2.1.4 Imán con geometría anular cayendo en tubo finito	15
2.2 <i>Modelado del tubo metálico</i>	16
3 Caída de un dipolo puntual	18
3.1 <i>Intensidad de la corriente inducida en la espira</i>	19
3.2 <i>Obtención de la ecuación de movimiento</i>	22
3.3 <i>Solución de la ecuación de movimiento: obtención de la velocidad terminal y el momento magnético del imán</i>	25
4 Caída de un imán anular	29
4.1 <i>Cálculo de la f.e.m inducida por el imán anular en movimiento y sus derivadas</i>	29
4.2 <i>Análisis de los aspectos energéticos</i>	33
4.2.1 Primera forma: Ecuación de Faraday - Maxwell	34
4.2.2 Segunda forma: Aplicando la Ley Ohm y la Ley de Joule	36
4.3 <i>Caída de un imán anular en un tubo finito</i>	38
5 Parte experimental	40
5.1 <i>Medidas</i>	41
5.1.1 Medidas de la geometría y masa	41
5.1.2 Medida del campo magnético	43
5.1.3 Medida del tiempo de caída	48
5.2 <i>Comparación con los modelos teóricos</i>	55
5.2.1 Comparación con el modelo dipolo puntual	56
5.2.2 Comparación con el modelo de imán anular	58
5.2.3 Discusión sobre los resultados teóricos frente a los experimentales	61
6 Conclusiones	63
Referencias	66
7 Anexo	68

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Algunos datos del imán G respecto a la sonda	44
Tabla 2: Algunos datos del imán G respecto a la sonda	44
Tabla 3: Contadores de tiempo en cada uno de los experimentos para el imán G.....	50
Tabla 4: Contadores de tiempo en cada uno de los experimentos para el imán P	50
Tabla 5: Medida de la velocidad en la posición de cada sensor y velocidad en RP para imán	51
Tabla 6: Medida de la velocidad en la posición de cada sensor y velocidad en RP para imán P .	51
Tabla 7: Masa, velocidad terminal y η experimentales.....	55
Tabla 8: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo dipolo puntual con el imán G.....	56
Tabla 9: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo dipolo puntual con el imán P	57
Tabla 10: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo imán anular con el imán G	59
Tabla 11: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo imán anular con el imán P	60
Tabla 12: Tabla completa de medidas experimentales del campo magnético del imán G	68
Tabla 13: Tabla completa de medidas experimentales del campo magnético del imán P	70

i

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1: Sección transversal de un imán anular cayendo por fuera de un tubo conductor	2
Figura 1-2: Experimento de Oersted. (Imagen obtenida de [2])	4
Figura 1-3: Analogía imán permanente y bobina de corriente. (Imagen obtenida de [4])	4
Figura 1-4: Campo magnético $B(t)$ generado por una espira por la que circula una corriente de intensidad $I(t)$. (Imagen obtenida de [5])	5
Figura 1-5: Modelo de dipolo de Ampère. (Imagen obtenida de [6])	6
Figura 1-6: Modelo de dipolo de Gilbert. (Imagen obtenida de [6])	6
Figura 1-7: El sentido de la corriente inducida (ley de Lenz) se muestra en la figura mediante una flecha de color azul. (Imagen obtenida de [10])	8
Figura 1-8: Se ilustra la aplicación de la Ley de Lenz para explicar el origen de la fuerza retardadora sobre el imán en términos de las corrientes inducidas en el tubo de metal. (Imagen obtenida de [10])	8
Figura 2-1: Líneas de campo magnético generadas por una espira circular filiforme de corriente. (Imagen obtenida de [15])	11
Figura 2-2: Equivalencia entre una cinta de corriente de intensidad I con un imán de la misma geometría y una imanación M_0 equivalente a la I de la cinta. (Imagen obtenida de [16])	13
Figura 2-3: Equivalencia entre la superposición de dos cintas de corriente de intensidad I y distinto radio con un imán de geometría anular y una imanación M_0 equivalente a la I de las cintas. (Imagen obtenida de [17])	15
Figura 3-1: Esquema de un dipolo cayendo a través de un tubo en el que se aprecian las fuerzas que aparecen, la dirección del momento dipolar magnético y de la velocidad del dipolo, y las corrientes inducidas en el tubo. (Imagen obtenida de [18])	18
Figura 3-2: Esquema de un dipolo magnético cayendo a través de una espira de radio a , con el momento magnético dipolar en el sentido positivo del eje OZ . (Imagen obtenida de [19])	19
Figura 3-3: Representación de la fem inducida por el dipolo magnético en función de la distancia z a la espira. (Imagen obtenida de [20])	21
Figura 3-4: Circuito equivalente a una espira del tubo conductor	21
Figura 3-5: Posición instantánea $z(t)$ del imán P con el modelo de dipolo puntual	27
Figura 3-6: Velocidad instantánea $z(t)$ del imán P con el modelo de dipolo puntual	27
Figura 4-1: Esquema de la espira diferencial y de la cinta de corriente por fuera del tubo infinito, y de la representación de las variables z y z'	30
Figura 4-2: Esquema de la sección transversal del tubo, en que aparece la densidad de corriente inducida recorrida por una línea de corriente respecto a ρ	36
Figura 4-3: Esquema de un imán anular cayendo por fuera de un tubo finito y la representación de la nueva variable $z_d(t)$ añadida al modelo	38
Figura 5-1: Imán G	40
Figura 5-2: Imán P	41
Figura 5-3: Báscula de precisión	41
Figura 5-4: Detalle del material añadido al imán chico	42
Figura 5-5: Componentes de medición del campo magnético del imán	43
Figura 5-6: Detalle de la situación de la sonda del teslámetro	43
Figura 5-7: Esquema de la ecuación teórica para obtener B_r	45
Figura 5-8: Comparación del ajuste de la interpolación con respecto a los datos experimentales en el imán G	46
Figura 5-9: Comparación del ajuste de la interpolación con respecto a los datos experimentales en el imán P	46
Figura 5-10: Aparatos de medición PHYWE timer 4-4	48
Figura 5-11: Sistema de medición del tiempo de caída	49
Figura 5-12: Sistema de medición de medida con el tubo e imán montados	49

Figura 5-13: Posición instantánea experimental del imán G comparada con una recta de pendiente igual a la velocidad en RP	52
Figura 5-14: Velocidad instantánea experimental del imán G comparada con la velocidad en RP	53
Figura 5-15: Posición instantánea experimental del imán P comparada con una recta de pendiente igual a la velocidad en RP	53
Figura 5-16: Velocidad instantánea experimental del imán P comparada con la velocidad en RP	54
Figura 5-17: Comparación del modelo dipolar puntual con la velocidad experimental del imán G	56
Figura 5-18: Comparación del modelo dipolar puntual con la velocidad experimental del imán P	57
Figura 5-19: Comparación del modelo imán anular con la velocidad experimental del imán G .	59
Figura 5-20: Comparación del modelo imán anular con la velocidad experimental del imán P..	60

1 INTRODUCCIÓN

“Si no conozco una cosa, la investigaré”

- Louis Pasteur-

Los fundamentos del electromagnetismo han permitido avances sin precedentes en nuestra civilización, aunque estos puedan pasar desapercibidos. La aplicación de sus leyes ha permitido por ejemplo la generación y transmisión de corriente eléctrica, en la automoción desde el patinete eléctrico hasta el tren de levitación magnética, en el hogar desde el cepillo de dientes eléctrico hasta el aire acondicionado, en las comunicaciones desde el móvil hasta los superordenadores, en la salud desde la resonancia magnética para el diagnóstico hasta la separación magnética de células tumorales para el tratamiento, y una lista que resultaría interminable atribuible al desarrollo de esta ciencia. Es casi imposible encontrar productos o procesos en donde no estén implicados directa o indirectamente los fundamentos del electromagnetismo.

En concreto este trabajo se centrará en el estudio del fenómeno denominado frenado magnético. Cuando un campo magnético variable atraviesa un conductor eléctrico, debido al fenómeno de la inducción magnética, se inducen corrientes en el mismo. Estas corrientes se denominan corrientes de Foucault. Estas corrientes al circular por el conductor, a su vez generan un campo magnético que se opone al anterior, a la vez que disipan su energía en forma de calor por el efecto Joule.

Estas corrientes de Foucault pueden ser convenientes o no, por ello a veces se les denomina corrientes parásitas. Por ejemplo, en el caso de los transformadores y de los motores, sus núcleos no se fabrican de forma maciza sino en un conjunto de láminas de poco espesor que reducen la aparición de estas corrientes parásitas. Si esto no se hiciese se perdería mucha energía en forma de calor y por lo tanto afectaría en la eficiencia eléctrica de la máquina. Este efecto de disipación de calor si que puede ser conveniente por ejemplo en las cocinas de inducción, que funcionan precisamente en base a estas corrientes. Otras aplicaciones de este fenómeno son su utilización en sistemas de frenado en vehículos de grandes dimensiones como algunos trenes, camiones o incluso en montañas rusas de algunos parques de atracciones. También para separar metales no férricos respecto a plásticos en sistemas de reciclaje, para la detección de metales o monedas y un largo etcétera, además de las propuestas que se siguen haciendo para su aprovechamiento, como la de un sistema de frenado de emergencia para un ascensor propuesto en el siguiente artículo.[1]

En este trabajo se pretende realizar un análisis teórico del fenómeno de frenado magnético utilizando métodos analíticos y numéricos, junto con la corroboración de los datos experimentales de un sistema concreto donde se producen estos fenómenos para poner de manifiesto sus aspectos más relevantes.

El sistema de estudio utilizado para ello consiste en un imán con forma de anillo que cae por el exterior de un tubo metálico dispuesto verticalmente. El imán al caer genera un peculiar y característico efecto por el cual se ve frenado en su caída, siendo este el objeto principal de este trabajo: la caracterización de la fuerza de frenado, de naturaleza magnética.

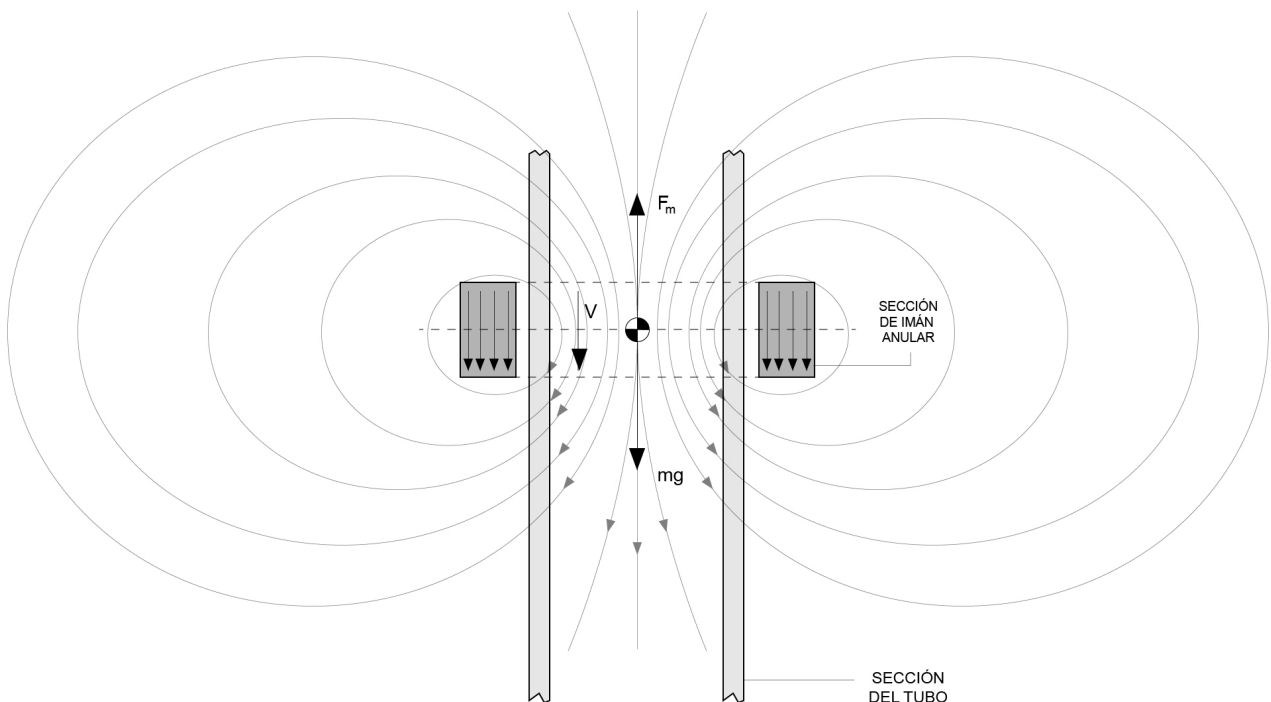


Figura 1-1: Sección transversal de un imán anular cayendo por fuera de un tubo conductor

El imán en su caída experimenta dos fuerzas principales, el peso debido a la gravedad de la Tierra y una fuerza de frenado de origen magnético. Tanto la fuerza de rozamiento de fricción del imán con las paredes del tubo metálico como la fricción con el aire que genera la superficie de este serán despreciadas. También se tomarán como hipótesis simplificadoras fundamentales que el imán cae totalmente centrado en el eje del tubo, siendo el plano del imán totalmente perpendicular a dicho eje en todo momento sin girar ni presentar oscilaciones. En cuanto a las hipótesis simplificadoras respecto al tubo metálico, se harán distintas suposiciones para ver cual de ellas se aproxima más al modelo físico real.

La forma de proceder a obtener esta fuerza de frenado magnética del modelo real será comenzar por un modelo sencillo con una solución analítica para mejorarlo hasta llegar a un modelo más próximo al real realizando un análisis numérico y una vez hecho esto, comparar los resultados con los datos experimentales para averiguar que modelo se aproxima más.

En el presente capítulo se definirán los conceptos básicos para entender el fenómeno de estudio, con una previa introducción histórica, se hablará de sus aplicaciones y se expondrá un ejemplo de estas. En el capítulo 2 se concretarán los diferentes modelos utilizados, que serán desarrollados por completo en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 5 se presentarán los resultados experimentales y se sacarán conclusiones al compararlos con el resto de los modelos. Finalmente se terminará con las conclusiones.

1.1 Fundamento teórico

Un breve repaso de la historia del electromagnetismo ayudará a entender sus fundamentos, que a su vez modelan el fenómeno de frenado magnético y simplificará las ideas, muchas veces vistas como complejas e inalcanzables a la hora de su entendimiento.

El descubrimiento de la electricidad se remonta ya antaño en torno al 600 a.c con Tales de Mileto que observó en un fragmento de ámbar al frotarlo se electrificaba y era capaz de atraer trozos de paja o plumas. En cuanto al magnetismo, éste se tiene constancia de su descubrimiento en la región de Magnesia, Grecia, donde se observó que trozos de magnetita atraían al hierro.

Durante siglos estos dos fenómenos se estudiaron de forma separada, como si se tratasen de dos fenómenos de naturaleza completamente distinta. Por el lado de la electricidad, en 1600 William Gilbert descubrió que la capacidad de electrificación no era un fenómeno exclusivo del ámbar, sino que era un fenómeno general de la materia. Más tarde en 1785 Charles Coulomb corroboró mediante sus experimentos la ley la cual tiene su nombre y que es la base de la electrostática. Pero no será hasta a principios del siglo XIX cuando se manifestaría por vez primera una conexión entre los fenómenos eléctricos y magnéticos, pese a que hubo intentos anteriores de investigar la relación entre cargas eléctricas e imanes, dada la analogía que se manifestaba entre estos.

No fue hasta el 1820 cuando Hans Christian Oersted realizó un experimento, por mera casualidad, que al fin unificó la electricidad y el magnetismo en una sola ciencia. Este consiste en cerrar un circuito haciendo pasar intensidad de corriente a través del alambre que lo constituye y observar qué al situar una brújula con una aguja imantada en las proximidades del hilo de corriente, la aguja dejaba de apuntar al norte magnético de la Tierra, oscilando alrededor de las direcciones paralela y perpendicular al conductor, quedando prácticamente perpendicular al alambre. Esto permitió deducir que un alambre con corriente eléctrica, es decir, con movimiento de electrones, produce un campo magnético. Este descubrimiento abrió abundantes vías de investigación que resultaron en numerosas respuestas y explicaciones a fenómenos.[2]

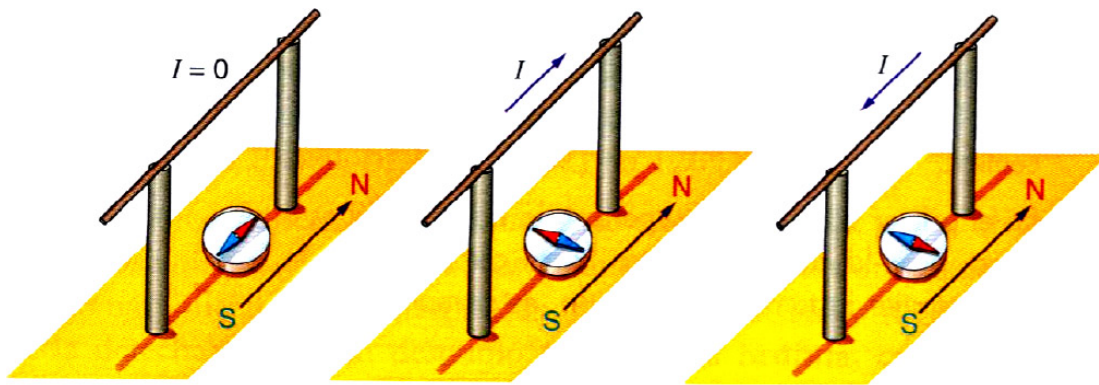


Figura 1-2: Experimento de Oersted.(Imagen obtenida de [2])

En la figura anterior (Figura 1-2) en el lado izquierdo se tiene el circuito abierto con la aguja en equilibrio, en el centro un circuito cerrado con la aguja orientada y sentido norte de la corriente, y la parte derecha el circuito cerrado con la aguja orientada y sentido sur de la corriente.

A partir de este experimento, a finales de 1820 se conocían las primeras leyes cuantitativas de la electrodinámica. En 1826 Ampère ultimaba su teoría, poco más tarde en 1831 Michael Faraday y Joseph Henry, casi simultáneamente, demostraron que cuando imán se mueve cerca de un conductor se genera corriente eléctrica en el mismo, descubriendo así la inducción electromagnética. Sus demostraciones establecieron que un campo magnético variable generaba un campo eléctrico, esta relación fue modelada matemáticamente por James Clerk Maxwell como la Ley de Faraday.[2][3]

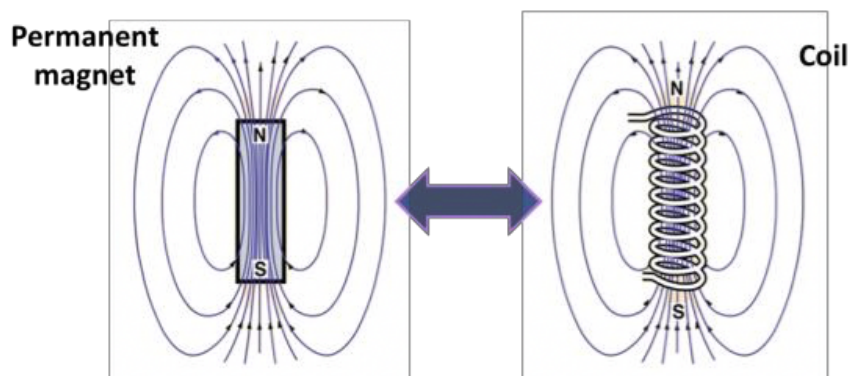


Figura 1-3: Analogía imán permanente y bobina de corriente. (Imagen obtenida de [4])

El fenómeno de frenado magnético es de naturaleza electromagnética. Por tanto, el modelo físico y matemático desarrollado para su análisis, se fundamenta en las ecuaciones de Maxwell, concretamente con la **Ley de Ampère-Maxwell** y con la **Ley de Faraday-Maxwell**, y por otro lado se fundamenta en la **Ley de Ohm**. Estas leyes serán explicadas con más profundidad a continuación.

Las ecuaciones de Maxwell establecen relaciones cuantitativas y cualitativas entre los campos electromagnéticos y sus fuentes o causas. Se comenzará interpretando una de las ecuaciones de Maxwell, la llamada **Ley de Ampère-Maxwell**.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Los distintos términos que aparecen en la ecuación son:

- \vec{B} : Es el vector de inducción magnética, el cual representa al **campo magnético**. En el Sistema Internacional se mide en tesla (T).

- μ_0 : Es la **constante de permeabilidad magnética del vacío** y su valor en el Sistema Internacional es de $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$. La permeabilidad magnética es una medida de la capacidad de una sustancia de atraer y hacer pasar a través de ella campos magnéticos.

- ϵ_0 : Es la **constante de permitividad eléctrica del vacío** y su valor en el SI es de $8.8541878176 \times 10^{-12} \text{ C}^2(\text{N} \cdot \text{m}^2)$. La permitividad eléctrica es una medida de la tendencia de una sustancia a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico.

- \vec{J} : Es la **densidad de corriente**. Caracteriza el flujo de cargas eléctricas en un punto. En el SI se mide en A/m .

- \vec{E} : Es el vector que representa el **campo eléctrico**. Este es un campo de fuerza creado por la atracción y repulsión de cargas eléctricas, causa del flujo de cargas eléctricas. En SI se mide en V/m .

El significado de la ecuación es más sencillo del que pueda parecer, explica que el movimiento de cargas eléctricas (primer término del lado derecho) y/o la variación de un campo eléctrico en el tiempo (segundo término del lado derecho) generan un campo magnético cerrado. Los distintos términos que aparecen en la ecuación son:

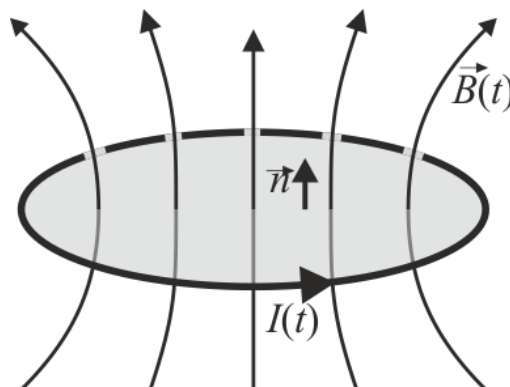


Figura 1-4: Campo magnético $B(t)$ generado por una espira por la que circula una corriente de intensidad $I(t)$. (Imagen obtenida de [5])

El campo magnético creado por sustancias magnetizadas es exactamente de la misma naturaleza que el creado por corrientes eléctricas (ambos producen análogos efectos sobre otras cargas en movimiento y sobre otros imanes). Por tanto, para que la ley de Ampère-Maxwell describa también el campo creado por sustancias magnetizadas, es necesario establecer una analogía entre éstas y las corrientes eléctricas.

Esto se hace a través del **dipolo magnético**, que es un elemento puntual ideal que produce un campo magnético dipolar, y que modela tanto una corriente en una espira puntual como un punto de una sustancia magnetizada. La cantidad que lo caracteriza es su **momento magnético dipolar** $\vec{\mu}$ (ó \vec{m}), cuya unidad en el Sistema Internacional es $A \cdot m^2$. Existen dos formas de ver a los dipolos magnéticos, la de Ampère que considera que los dipolos magnéticos son pequeñas espiras de corriente, y la visión de Gilbert, que supone la existencia de polos magnéticos separados dentro de cada dipolo.[6]

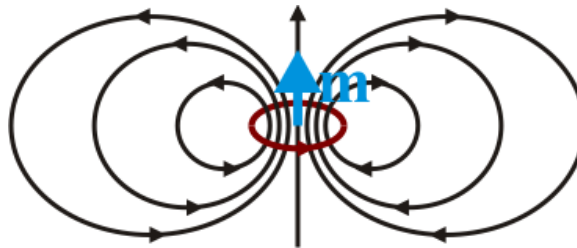


Figura 1-5: Modelo de dipolo de Ampère. (Imagen obtenida de [6])

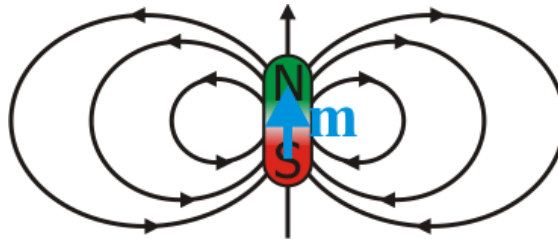


Figura 1-6: Modelo de dipolo de Gilbert. (Imagen obtenida de [6])

En el presente trabajo usaremos la visión de Ampère, que resulta más simple operativamente hablando, además de que refleja mejor la dualidad entre la electricidad y el magnetismo.

Otro concepto importante ligado al del momento magnético μ es el de **vector imanación** $\vec{M}(\mathbf{r})$, cuya unidad en el Sistema Internacional es el A/m . Los medios materiales perciben y producen campos magnéticos debido a la presencia de dipolos magnéticos en su interior. Cada uno de los átomos y partículas subatómicas que componen la materia poseen su momento magnético dipolar [7]. Para caracterizar estos momentos magnéticos, Dado un pequeño elemento de volumen $\Delta\tau$ (lo suficientemente pequeño para ser microscópico, pero lo suficientemente grande como para contener miles de partículas)

definimos \vec{M} en un punto \mathbf{r} de una sustancia magnética, como el momento magnético por unidad de volumen, dado:

$$\vec{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\tau} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{\mu_i \in \Delta\tau} \vec{\mu}_i$$

Si $M(r) = 0$, los momentos magnéticos están distribuidos isentrópicamente por lo que la sustancia no está imanada. En cambio, si la mayoría de los dipolos están orientados según alguna dirección, esta será la del vector imanación $M(r)$. [8]

Por lo que el momento magnético $\vec{\mu}$ en la relación con \vec{M} de la sustancia es:

$$\vec{\mu} = \int_{\tau} \vec{M} d\tau$$

Otra ecuación necesaria para entender los conceptos es la **Ley de Faraday-Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esta ecuación representa que la menos variación de un campo magnético en función del tiempo (término derecho de la ecuación) genera un campo eléctrico que se cierra. Esta ley, también llamada ley de inducción, es la que explica la aparición de una fuerza electromotriz en un conductor ante un campo magnético variable en el tiempo. El signo negativo de la variación temporal del campo magnético procede de la **Ley de Lenz**, la cual explica el fenómeno de que el sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la variación del campo aplicado [9], como si de una inercia se tratase al intentar permanecer en el estado en el que se encontraba.

Poniéndose esta ley en forma integral y aplicando el Teorema de Stokes en el lado izquierdo de la ecuación, obteniéndose:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

En el término izquierdo se tiene la expresión de la **fuerza electromotriz**:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La fuerza electromotriz ε se puede definir como el trabajo necesario en un conductor (producido por un generador, por ejemplo) para mantener el movimiento de la unidad de carga, su unidad en el SI es el Voltio (V).

En cuanto al término derecho (sin aplicar la menos variación temporal) se tiene la expresión del **flujo magnético**:

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

El flujo magnético ϕ_m se calcula a partir del campo magnético, la superficie sobre la cual actúa y el ángulo que forman las líneas de campo magnético con los elementos diferenciales de dicha superficie. Es una medida de la cantidad de magnetismo en una superficie y su unidad en el SI es el weber ($Wb = T \cdot m^2$). [9]

Sustituyéndose los términos de los dos conceptos anteriores en la ley de Faraday-Maxwell en forma integral se obtiene:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Por lo que remarcando lo anteriormente dicho, la variación de flujo magnético en presencia de un conductor genera en él una fuerza electromotriz inducida que produce una corriente eléctrica en el mismo, como si de un generador se tratase.

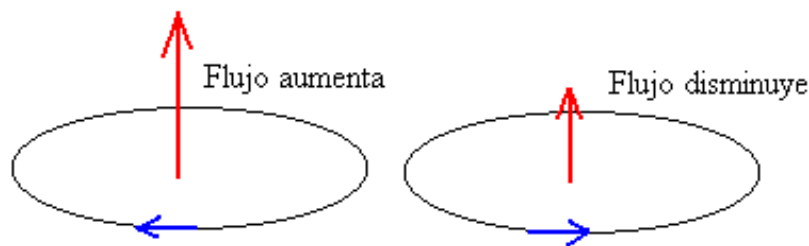


Figura 1-7: El sentido de la corriente inducida (ley de Lenz) se muestra en la figura mediante una flecha de color azul. (Imagen obtenida de [10])

Aplicando el efecto descrito a nuestro modelo de estudio, se manifiesta el siguiente comportamiento:

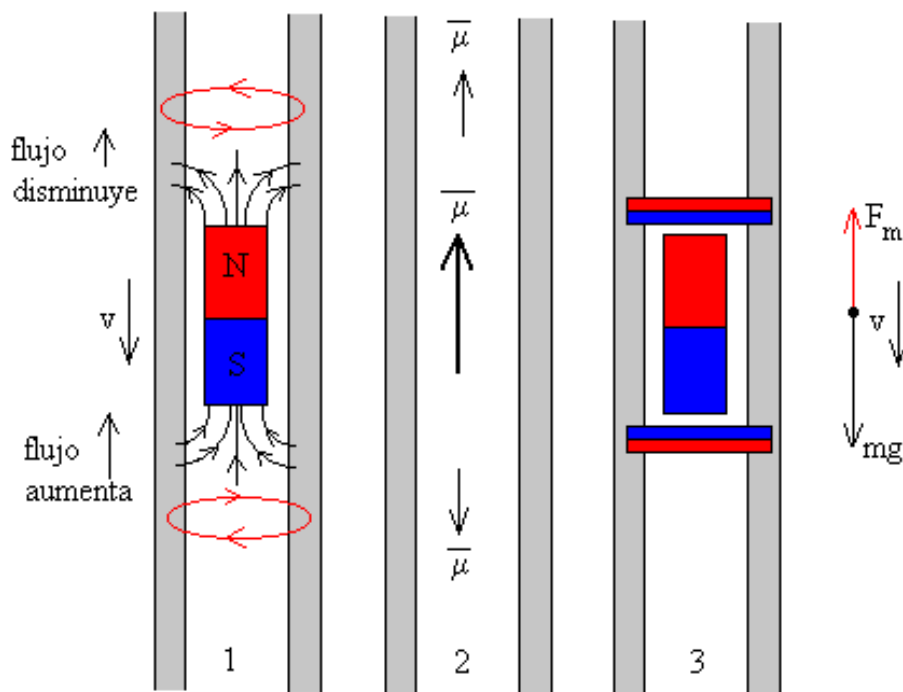


Figura 1-8: Se ilustra la aplicación de la Ley de Lenz para explicar el origen de la fuerza retardadora sobre el imán en términos de las corrientes inducidas en el tubo de metal. (Imagen obtenida de [10])

Al descender el imán por el tubo, el flujo del campo magnético disminuye en la región cercana al polo Norte a la vez que aumenta en la región cercana al polo Sur. Al suceder esto se genera una corriente inducida que se opone a la variación de flujo magnético, representado en la parte (1) de la figura. Estas corrientes inducidas llevan asociadas a su vez un momento magnético, de los

cuales se puede ver su sentido en la parte (2), y que refleja que la parte superior del tubo atrae al imán en su caída mientras que la parte inferior lo repele. Estas dos fuerzas que se oponen a la caída del imán generan en su superposición la fuerza magnética (o fricción magnética como la denominaremos aquí) que se opone al peso del imán, como se puede ver en la parte (3) del esquema de fuerzas. [11]

La **ley de Ohm** es una ley constitutiva. Éstas son leyes que caracterizan el comportamiento de la materia en presencia del campo electromagnético. Concretamente, la ley de Ohm describe que en un medio material real con cargas eléctricas libres (medio óhmico), la presencia de un campo eléctrico produce una corriente eléctrica (fenómeno de movimiento de las cargas) tal que la densidad volumétrica de corriente en cada punto es proporcional y colineal al campo eléctrico en dicho punto. La expresión de esta ley es la siguiente:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

En esta ecuación σ es la conductividad del material, siendo esta una medida de la capacidad de la sustancia para dejar pasar la corriente eléctrica a través de él, siendo esta mayor a mayores valores de conductividad. Es una propiedad de cada material y se mide en Si en (S/m) .

Esta ley explica que si las cargas se mueven es por hay un campo eléctrico que las empuja, aunque debido a la fricción que experimentan las cargas en el material, la velocidad de estas es directamente proporcional al campo eléctrico.[12]

Otro concepto de gran importancia para el desarrollo del presente proyecto es el del **potencial vector magnético** \vec{A} . Dada la **Ley de Gauss** para el campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Esta nos afirma que la divergencia del campo magnético es cero, lo que significa que no existen fuentes ni sumideros del campo por lo que no existen cargas magnéticas y al no existir estas, el campo debe cerrarse sobre sí mismo. Otra consecuencia de esta ley de Maxwell, debido a que esta divergencia es cero, es la existencia de un potencial vector magnético denominado \vec{A} , el cual derivada del campo \vec{B} , y cuyo rotacional es el mismo campo \vec{B} [13].

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Aquí es cuando llega la utilidad el potencial vector magnético \vec{A} , ya que podemos aplicar su definición junto con el teorema de Stokes al flujo magnético:

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{ds} = \oint_r \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

Alcanzándose así la expresión del flujo magnético en función del potencial vector:

$$\phi_m = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Esta expresión simplifica bastante el problema, ya que pasamos de una integral doble de superficie con dos variables, a una integral de línea con una sola variable. Debido a esto, se trabajará con la expresión del potencial vector \vec{A} en vez de con el campo magnético directamente.

En virtud de la ley de inducción electromagnética, relacionamos la variación instantánea del potencial vector, expresado en términos de \vec{A} , con la fuerza electromotriz, expresada en términos del campo eléctrico \vec{E} , llegamos a la conclusión de que, en general:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

Siendo ϕ un campo escalar creado por cargas eléctricas y que el $\vec{\nabla} \phi$ se incluye teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$. Para finalizar, la anteriormente explicada ley de Ohm describe cómo este campo eléctrico inducido debido a la variación del flujo magnético ocasionada por el imán en movimiento da lugar a la aparición de unas corrientes inducidas que son causa del campo magnético que actuará sobre el imán, oponiéndose a su movimiento, más concretamente oponiéndose a su variación de energía cinética.

2 MODELADO DEL SISTEMA

“Ninguna investigación humana puede ser llamada ciencia real si no puede demostrarse matemáticamente”

-Leonardo da Vinci-

En este capítulo se explicarán los distintos modelos teóricos y la obtención del potencial vector magnético \vec{A} de cada uno de los modelos. Dada la dualidad de corrientes eléctricas e imanes, todos los modelos teóricos para las sustancias magnetizadas serán desarrollados en términos de corrientes de imanación; es decir, corrientes eléctricas equivalentes a la imanación de la sustancia magnetizada, en el sentido de que aquéllas presentan las características adecuadas para que sean fuente de un campo magnético equivalente al del imán considerado.

También se expondrán las hipótesis utilizadas tanto para los imanes como para el modelado del tubo metálico.

La expresión del potencial vector magnético \vec{A} para una distribución de volumen obtenida a partir de la expresión obtenida de la aplicación de la Ley de Biot y Savart al campo magnético de una distribución igual es [13]:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Las expresiones del potencial vector magnético de los cuales se derivan los campos magnéticos creados por una corriente filiforme de intensidad I , y por una densidad superficial de corriente K son, respectivamente [14]:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{K(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

Los términos necesarios para entender las ecuaciones son \vec{r}' es la posición del punto de material que genera el campo y \vec{r} es el punto en el que se mide el campo. Por otro se tiene $d\vec{r}'$, $d\vec{s}'$ y $d\vec{\tau}'$ que son respectivamente los diferenciales de longitud, superficie y volumen orientados en las

mismas direcciones que sus respectivas distribuciones de densidad de corriente: filiformes I , superficiales K y volumétricas J . En la integral aparece en que geometría hay que integrar las distribuciones de corrientes, siendo Γ geometría filiforme, S de superficie y τ de volumen.

2.1 Modelado del imán

A la hora de obtener la expresión del potencial vector magnético \vec{A} de los siguientes modelos asumiremos la hipótesis de tubo infinito, válida para el caso en el que el imán sea de una altura mucho menor que la longitud del tubo metálico conductor, como es en nuestro caso. Esto permite utilizar la concepción de velocidad relativa, y en vez del imán ser el que se desplazada, se puede ver como si estuviese fijo y es el tubo el que se desplaza a su alrededor. El problema visto de esta forma es perfectamente equivalente, a la vez que simplifica de sobremanera los cálculos matemáticos.

Por último, se propondrá un modelo, que no se llegará a comprobar numéricamente, en el que no se asume dicha hipótesis, introduciendo una variable $\mathbf{z}_d(t)$ que indicará la posición instantánea del imán, y que permitirá también integrar a lo largo de la longitud del tubo a la hora de la resolución de la ecuación de movimiento y de la obtención de la constante de fricción magnética η , con el que puede comprobarse si la hipótesis de tubo infinito es o no un buen supuesto, aunque no se desarrollará en este trabajo más que en su planteamiento.

2.1.1 Espira de corriente circular: potencial vector

En este modelo, se usará una espira circular de radio a por la cual circular una corriente y esta representará el campo magnético que genera un dipolo magnético puntual. Esta vision del dipolo es la ya explicada vision de Ampère.

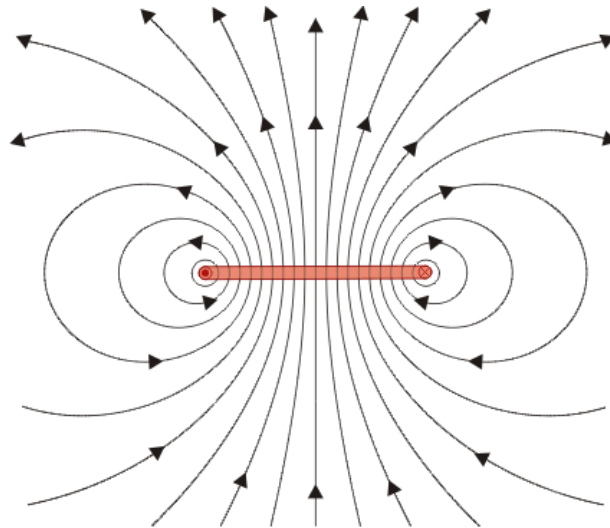


Figura 2-1: Líneas de campo magnético generadas por una espira circular filiforme de corriente.
(Imagen obtenida de [15])

Se utilizarán también las llamadas “integrales elípticas” para la obtención del potencial vector \vec{A} , en vez de las expresiones en serie del desarrollo multipolar ya que éstas resultan más engorrosas a la hora del cálculo [5].

La expresión del componente azimutal del potencial vector magnético \vec{A} de una espira de radio a en términos de integrales elípticas y en coordenadas cilíndricas es la siguiente [15]:

$$\vec{A}_\varphi(a, \rho, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \left(\left(\frac{\rho^2 + a^2 + z^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + z^2}} \right) K(k) - \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + z^2} \right) E(k) \right) \vec{u}_\varphi$$

:

Siendo la k y las integrales elípticas de primera y segunda especie:

$$k = \frac{4\rho a}{(\rho + a)^2 + z^2}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k \sin^2(t)}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} \cdot dt$$

La ecuación se encuentra en coordenadas cilíndricas, no necesitando una variable φ debido a la simetría de revolución respecto al eje OZ , por ello sólo se tiene componente azimutal del potencial vector \vec{A} . La variable ρ es la coordenada cilíndrica, es decir, la distancia desde el origen del eje OZ y la variable z da la altura en el propio eje OZ al punto al que esta produce el campo.

Aunque en este modelo no utilizaremos integrales elípticas, ya que, al ser tan simple, se hace más cómodo usar la expresión de la definición del potencial vector magnético \vec{A} para puntos mucho mayores al radio de la espira (para $r \gg R$), en coordenadas cilíndricas. En este modelo partimos de la hipótesis de que el dipolo puntual cae por dentro del tubo a lo largo de su eje de simetría, y con el eje OZ en la dirección del momento dipolar magnético del dipolo puntual, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\vec{A}_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_\varphi$$

Esta es la expresión del potencial vector \vec{A} de un dipolo puntual, es decir, de una espira de radio $a \rightarrow 0$ o de un imán de volumen $V \rightarrow 0$, ambos de momento dipolar μ .

2.1.2 Imán con volumen y altura

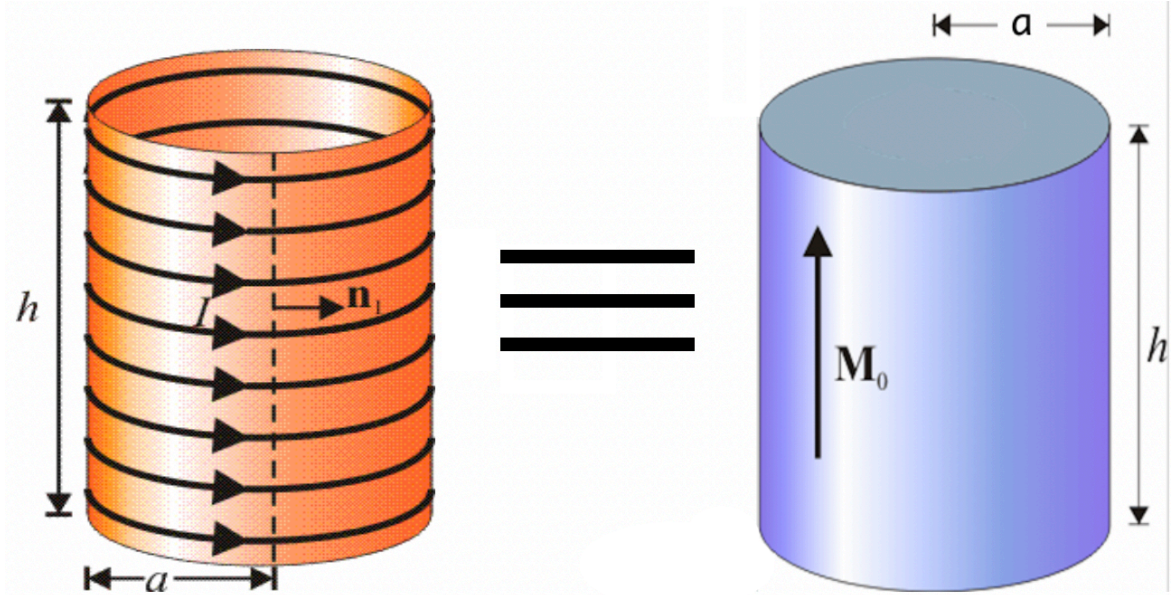


Figura 2-2: Equivalencia entre una cinta de corriente de intensidad I con un imán de la misma geometría y una imanación M_0 equivalente a la I de la cinta. (Imagen obtenida de [16])

En este caso se parte de la ecuación del potencial vector \vec{A} asociada a una espira de corriente en términos de integrales elípticas:

$$\vec{A}_\varphi(a, \rho, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \left(\left(\frac{\rho^2 + a^2 + z^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + z^2}} \right) K(k) - \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + z^2} \right) E(k) \right) \vec{u}_\varphi$$

Dado esta ecuación y con los conceptos explicados anteriormente, se puede lograr una equivalencia al campo magnético de un imán con un radio dado, con volumen y altura. Esto se puede hacer superponiendo una serie de espiras de forma equiespaciada (en el caso discreto) del mismo radio que el imán, radio a , por las que circula un diferencial discreto de corriente I una encima de otra (en el mismo eje de simetría) hasta llegar a la altura del imán y que sumando todos esos diferenciales discretos se obtenga corriente de imanación equivalente a la imanación uniforme del imán $M_0 \vec{u}_z$, de forma que se obtuviese el mismo campo magnético.

Pasando este procedimiento al caso diferencial se tiene que la densidad superficial de carga \vec{K}_m se relaciona con la imanación $M_0 \vec{u}_z$ mediante:

$$\vec{K}_m = M_0 \vec{u}_\varphi$$

Para obtener el potencial \vec{A} en forma diferencial, $d\vec{A}_\varphi$, se deberá añadir una variable llamada z' , que nos indica a que altura en el eje Z se encuentra la espira diferencial, siendo $z - z'$ la distancia entre la espira diferencial y el punto al que esta produce el campo, y poner esta variable z' en forma diferencial dz' para posteriormente integrar en la altura del imán y así lograr obtener el potencial vector magnético \vec{A} asociado a una cinta de corriente. Aplicando esto se obtiene el potencial vector magnético $d\vec{A}_\varphi$ asociado a una espira infinitesimal de corriente:

$$dI = M_0 \cdot dz'$$

$$\begin{aligned} d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z') &= \frac{\mu_0 M_0 dz'}{2\pi\rho} \left(\left(\frac{\rho^2 + a^2 + (z - z')^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}} \right) K(k) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2} \right) E(k) \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Con k siendo:

$$k = \frac{4\rho a}{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}$$

2.1.3 Imán con geometría anular

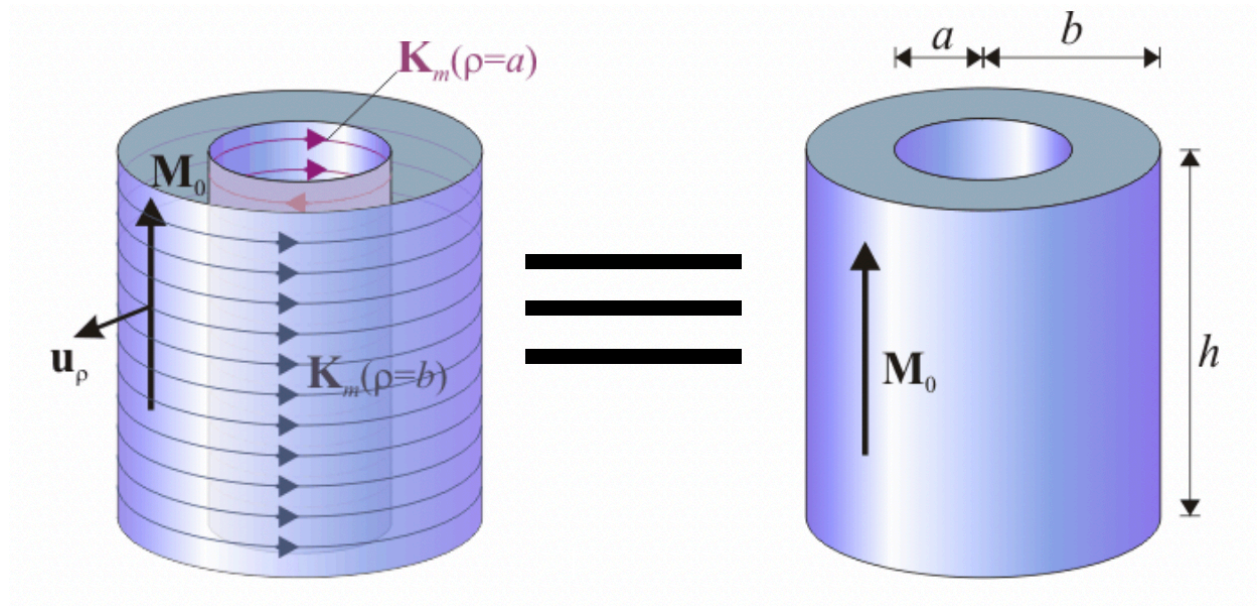


Figura 2-3: Equivalencia entre la superposición de dos cintas de corriente de intensidad I y distinto radio con un imán de geometría anular y una imanación M_0 equivalente a la I de las cintas. (Imagen obtenida de [17])

En este modelo se busca la geometría anular del anillo real, para ello se utilizará la expresión obtenida para una cinta de corriente y por superposición, se le sumará otra cinta de corriente de radio igual al radio interno del anillo y con la misma intensidad de corriente cambiada de signo, es decir, para el cálculo del potencial vector creado por la distribución de corriente de imanación en la superficie exterior (cinta externa), empleamos el valor M_0 ; y para calcular el potencial creado por la distribución en la superficie interna se usará el valor $-M_0$. El campo \vec{A} obtenido de esta superposición de cintas de corrientes, es equivalente al de un imán con geometría anular.

$$\vec{A}_{Total\ Anillo} = \vec{A}_{cinta\ externa} + \vec{A}_{cinta\ interna}$$

2.1.4 Imán con geometría anular cayendo en tubo finito

Como se ha introducido antes en el subcapítulo, en este modelo añadiremos una coordenada $\mathbf{z}_d(t)$ al potencial vector \vec{A} que nos dará la posición instantánea del imán, lo cual permitiría analizar el comportamiento del movimiento del imán si se arrojase desde un borde del tubo o incluso desde un punto más elevado. En este caso, al contrario que en los anteriores modelos consideramos el tubo fijo y el imán el que cae.

El potencial \vec{A} asociado a una cinta de corriente con las características anteriormente explicadas es:

$$\begin{aligned} d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z', z_d(t)) \\ = \frac{\mu_0 M_0 dz'}{2\pi\rho} \left(\left(\frac{\rho^2 + a^2 + (z - z' - z_d)^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z' - z_d)^2}} \right) K(k) \right. \\ \left. - \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z' - z_d)^2} \right) E(k) \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Siendo k :

$$k = \frac{4\rho a}{(\rho + a)^2 + (z - z' - z_d)^2}$$

Para obtener el potencial \vec{A} de una forma anular, basta hacer superposición como en el caso anterior:

$$\vec{A}_{Total\ Anillo} = \vec{A}_{cinta\ externa} + \vec{A}_{cinta\ interna}$$

2.2 Modelado del tubo metálico

En este apartado, se expondrán las hipótesis realizadas a la hora de modelar el tubo metálico. Estas se irán probando, dependiendo del modelo para analizar en que forma aproxima o no al modelo real.

Las hipótesis tomadas respecto al tubo son las siguientes:

- **Hipótesis de tubo infinito:** Esta es válida cuando la altura del tubo es mucho mayor que la del imán. Con ella se desprecian los llamados efectos de borde y también permite simplificar los cálculos matemáticos en gran medida.
- **Hipótesis de tubo de poco espesor:** Esta aproximación es valida cuando las diferencias entre las dimensiones del espesor son pequeñas en comparación las dimensiones del resto del tubo y del imán. Esto permite reducir cálculos y se trabaja con el espesor y el radio medio como aproximación. Se desprecia la variación del campo en esa dirección al tener tan poco espesor.
- **Hipótesis de circuito equivalente sin autoinducción:** Ya que el tubo metálico se va a modelar como un conjunto de espiras infinitesimales con su circuito equivalente para obtener las corrientes inducidas en el mismo, en este esquema no se tendrá en cuenta la autoinducción ya que se considera despreciable.
- **No se considera el efecto skin:** Este efecto consiste que un conductor ante la presencia de una corriente alterna genera una mayor presencia de densidad de corriente en el mismo, por lo tanto, reduciendo la sección efectiva y aumentando la resistencia y las

pérdidas de energía por efecto Joule en el conductor. Este efecto es importante en conductores de grandes secciones o macizos y con una alta frecuencia en la corriente alterna. Dado que el tubo de nuestro modelo físico es de muy poco espesor este efecto lo podemos considerar despreciable.

3 CAÍDA DE UN DIPOLO PUNTUAL

*“Nada tiene tanto poder para ampliar la mente
como la capacidad de investigar de forma
sistemática y real todo lo que es susceptible de
observación en la vida”.*

- Marco Aurelio -

El presente capítulo, se desarrollará el modelo de un dipolo puntual magnético modelado por una espira de corriente cayendo por el eje de un tubo metálico conductor. Este problema ha sido abordado en numerosas ocasiones, por lo que se prescindirá del desarrollo completo de ciertas ecuaciones, como se ha hecho previamente a la hora de presentar la fórmula de su potencial vector \vec{A} .

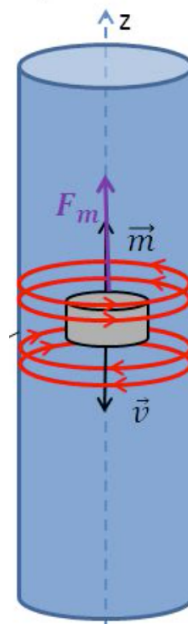


Figura 3-1: Esquema de un dipolo cayendo a través de un tubo en el que se aprecian las fuerzas que aparecen, la dirección del momento dipolar magnético y de la velocidad del dipolo, y las corrientes inducidas en el tubo. (Imagen obtenida de [18])

Este modelo se desarrollará como un estudio analítico preliminar que permite demostrar la analogía existente entre la fuerza de interacción magnética que se opone al movimiento de caída del imán (debida al campo magnético creado por las corrientes inducidas en el tubo debido al propio movimiento del imán), y una fuerza tipo rozamiento viscoso η .

A la hora de resolver la ecuación de movimiento se puede optar por un planteamiento energético y otro mediante la obtención de fuerzas. Este primer planteamiento se reservará para los modelos más sofisticados ya que este el método por fuerzas sería muy complejo de implementar en estos. Por ello para este modelo, dado su simplicidad, si se aplicará el método de la obtención de fuerza, así en conjunto se expondrán las distintas formas y caminos posibles para llegar al mismo propósito, lograr caracterizar la la fricción magnética mediante una constante η .

El problema a resolver consiste en averiguar la que fuerza de interacción entre el momento dipolar magnético del imán y una espira de corriente, ya que las corrientes inducidas en el tubo que interaccionan con el imán se modelan geoméricamente como una distribución continua de espiras idénticas (cada una de ellas modeladas con un circuito equivalente como se explicará posteriormente) a lo largo del tubo cada una de ellas recorrida por una corriente de intensidad infinitesimal $dI = J ds = J d\rho dz$, para finalmente integrar en la longitud del tubo y averiguar la fuerza total de frenado generada hacia el imán.

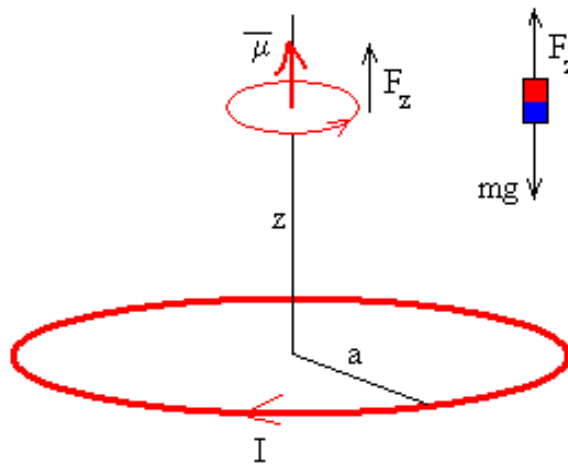


Figura 3-2: Esquema de un dipolo magnético cayendo a través de una espira de radio a , con el momento magnético dipolar en el sentido positivo del eje OZ. (Imagen obtenida de [19])

3.1 Intensidad de la corriente inducida en la espira

En esta subsección se tratará la obtención de la intensidad de corriente inducida en una espira circular filiforme de radio a debido al flujo magnético del campo magnético variable asociado al dipolo puntual en movimiento a través de esta.

Partiendo de la ecuación del potencial vector \vec{A} creado por un dipolo magnético puntual expuesta anteriormente y haciendo la variable ρ igual al radio de la espira:

$$\vec{A}_\phi(\rho = a, z) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_\phi$$

Utilizándose la ecuación del flujo magnético ϕ_m en función del potencial vector \vec{A} al potencial \vec{A}_φ del dipolo magnético:

$$\phi_m = \oint \vec{A}_\varphi \cdot d\vec{l}$$

Se obtiene la expresión del flujo magnético ϕ_m en función de z :

$$\phi_m(z) = \frac{\mu_0 \mu}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Este es el flujo magnético que genera el dipolo magnético al caer dentro de una espira circular conductora (diferencial de un tubo metálico conductor). Ahora se está en disposición de obtener la ε_{ind} , aplicando a su fórmula un cambio de variable se obtiene queda:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot (-v)$$

Por lo que finalmente se llega a la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{3\mu_0 \mu a^2}{2} \cdot \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

El signo negativo se anula ya que la v es negativa, ya que se dirige en dirección negativa en el eje Z (hacia abajo). Analizando la ε_{ind} se puede ver que la corriente inducida aumenta a medida que el dipolo se acerca a la espira llegando a un máximo para luego valer exactamente cero en el centro de la misma y simétricamente tener otro máximo de signo contrario (un mínimo).

Estos máximos y mínimos se encuentran:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{a}{2}$$

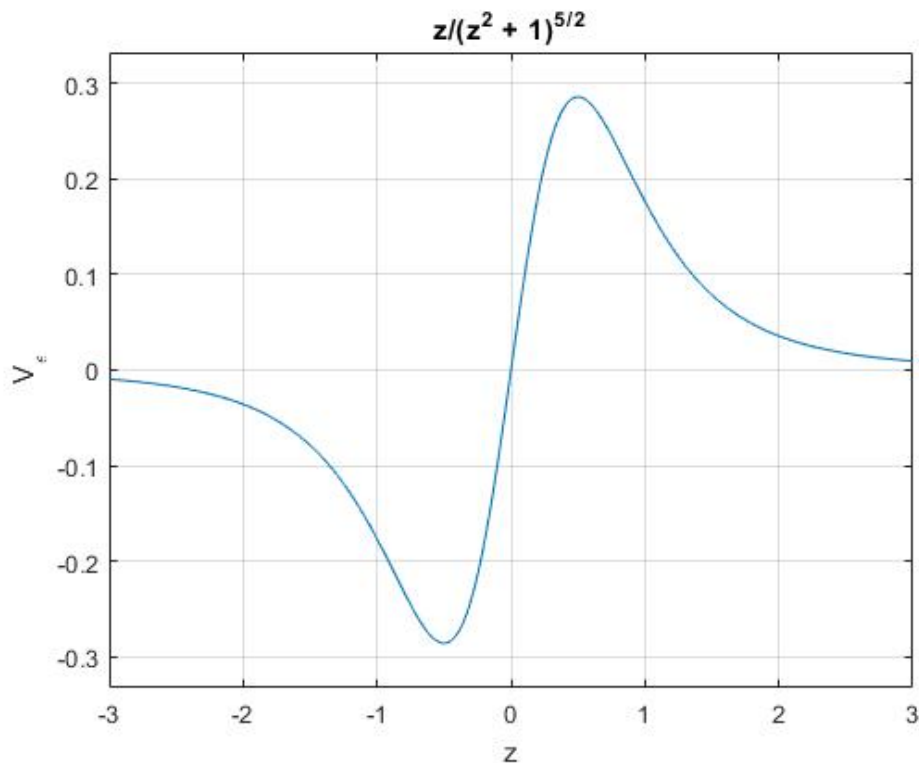


Figura 3-3: Representación de la fem inducida por el dipolo magnético en función de la distancia z a la espira. (Imagen obtenida de [20])

A continuación, se va a obtener el circuito equivalente a una espira inducida. Al modelar una espira el diferencial del tubo metálico conductor como un circuito equivalente, se obtiene un esquema muy claro y simplificado. No se ha tenido en cuenta la autoinducción como se mencionó en el apartado de hipótesis simplificadoras. Para ello no habría más que añadir una inductancia L al circuito, pero esto complicaría la resolución analítica y no aportaría mucho debido a su poca influencia en este caso concreto. En la siguiente figura se puede ver el esquema del circuito equivalente y la ecuación que relaciona la ε_{ind} con la I y la resistencia del conductor R :

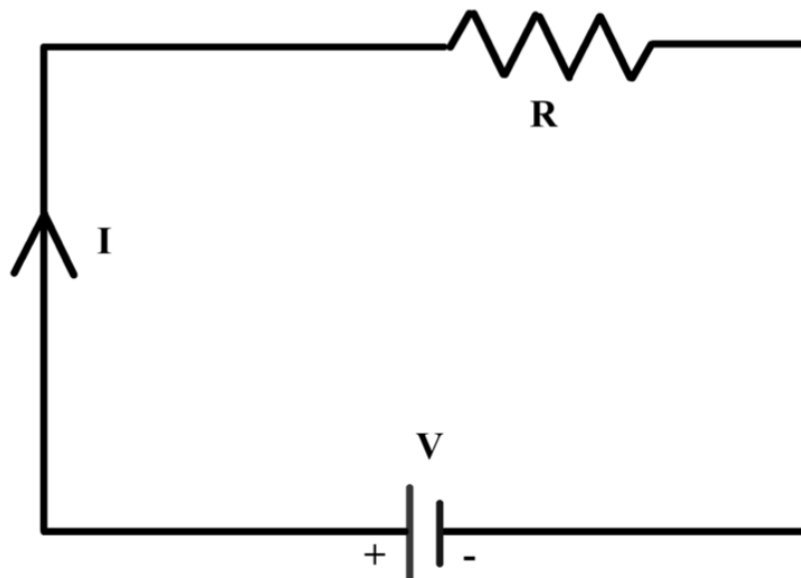


Figura 3-4: Circuito equivalente a una espira del tubo conductor

$$\varepsilon_{ind} = V = I \cdot R$$

Obteniendo de esta expresión, la corriente inducida I correspondiente al circuito equivalente de la espira circular por la cual pasa moviéndose la espira de corriente (el dipolo).

$$I = \frac{3\mu_0\mu a^2}{2R} \cdot \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \cdot \frac{dz}{dt}$$

3.2 Obtención de la ecuación de movimiento

En este apartado se procederá a la obtención y resolución de la ecuación de movimiento. El vector de posición que describe la posición del imán respecto del sistema de referencia adoptado es $\vec{r} = z(t) \vec{u}_z$, donde el sentido positivo del eje OZ se toma en el sentido opuesto de la interacción gravitatoria. De esta forma el peso será:

$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z$$

En consecuencia, la fuerza de frenado magnético que se opone al movimiento de caída será:

$$\vec{F}_m = F_m \vec{u}_z \quad \text{con } F_m > 0$$

Dado que las únicas fuerzas que actúan son el peso y la fuerza de frenado magnético la ecuación diferencial será:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_m - mg$$

A continuación, se hará una estimación analítica de la fuerza de frenado que experimenta el dipolo al caer por el tubo. Para ello lo que se necesita es la fuerza que ejerce el campo magnético creado por la corriente inducida en la espira sobre el dipolo magnético puntual. Sin embargo, aplicando el principio de acción y reacción, dicha fuerza será opuesta a la que ejerce el campo \vec{B} del dipolo puntual sobre la corriente inducida en la espira (debido al propio movimiento del dipolo respecto a la espira) y se sigue este procedimiento por presentar mayor simplicidad en la formulación.

Comenzaremos por lo anteriormente mencionado, con la expresión de la fuerza que ejerce el campo \vec{B} del dipolo puntual sobre una porción de espira $d\vec{l}$ de corriente inducida y de intensidad I , y dada la relación de Lorentz se obtiene:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Se analiza la ecuación y se deduce que se anula por simetría una de las componentes del campo \vec{B} del dipolo. La componente vertical del campo \vec{B}_z genera una fuerza radial, que debido a la simetría de revolución se ve anulada. La componente radial del campo \vec{B}_ρ genera una fuerza vertical, siendo esta la fuerza que se opone a la caída del imán.

$$\overrightarrow{dF_z} = IB_\rho dl \vec{u_z} = JB_\rho dV \vec{u_z} \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Usándose en primer lugar la Ley de Faraday y teniendo en cuenta que $\vec{v} = \dot{z} \vec{u_z}$, se obtiene:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = \dot{z} \vec{u_z} \times (B_\rho \vec{u_\rho} + B_z \vec{u_z}) = \dot{z} B_\rho \vec{u_\varphi}$$

Conociéndose la componente radial del campo \vec{B} creado por un dipolo puntual [20]:

$$\vec{B}_\rho = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \vec{u_\rho}$$

Usandose la ley de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\vec{J} = \sigma \dot{z} B_\rho \vec{u_\varphi}$$

Sustituyendo los elementos anteriores en la ecuación de $\overrightarrow{dF_z}$ e integrando entre 0 y 2π respecto a $d\varphi$, se obtiene:

$$\overrightarrow{dF_z} = (2\pi) \sigma \dot{z} (B_\rho)^2 \rho d\rho dz \vec{u_z}$$

Reescribiendo la ecuación de la $\overrightarrow{dF_z}$ con los términos anteriores se obtiene:

$$\overrightarrow{dF_z} = \frac{9(\mu_0 \mu)^2 \sigma \dot{z}}{8\pi} \cdot \frac{\rho^3 z^2}{(\rho^2 + z^2)^5} d\rho dz \vec{u_z}$$

Esta es la expresión de la la fuerza infinitesimal sobre una línea de corriente en el conductor, de radio ρ y situada a una distancia z del dipolo magnético.

Considerando la hipótesis de espesor despreciable se estima que la componente radial $\overrightarrow{u_\rho}$ del campo no variará apenas en esa dirección. Usaremos el radio medio C y el espesor δ , siendo A y B el radio externo e interno respectivamente del tubo. Como nota aclaratoria, los valores de las dimensiones del tubo serán puestas en letras mayúsculas y las del imán en letras minúsculas.

$$C = \frac{A + B}{2}$$

$$\delta = A - B$$

Haciendo $\rho = C$:

$$\overrightarrow{dF_z} = \frac{9(\mu_0\mu)^2\sigma\dot{z}C^3}{8\pi} \cdot \frac{z^2}{(z^2 + C^2)^5} d\rho dz \overrightarrow{u_z}$$

Posteriormente integramos considerando la hipótesis de tubo infinito, esto matemáticamente es haciendo los límites de integración desde menos infinito hasta más infinito:

$$\overrightarrow{F_z} = \frac{9(\mu_0\mu)^2\sigma\dot{z}C^3\delta}{8\pi} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2}{(z^2 + C^2)^5} dz \overrightarrow{u_z}$$

$$z_1 = -\infty \quad z_2 = +\infty$$

$$\overrightarrow{F_z} = \frac{9(\mu_0\mu)^2\sigma\dot{z}C^3\delta}{8\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{(z^2 + C^2)^5} dz \overrightarrow{u_z}$$

Tras integrar se obtiene la fuerza resultante que genera el campo magnético del dipolo sobre la espira inducida:

$$\overrightarrow{F_z} = \frac{45(\mu_0\mu)^2\sigma\delta}{1024C^4} \dot{z} \overrightarrow{u_z}$$

En virtud del principio de acción y reacción, se identifica a $\overrightarrow{F_m}$ como la fuerza ejercida por las corrientes inducidas en la espira sobre el dipolo, por lo que $\overrightarrow{F_m} = -\overrightarrow{F_z}$:

$$\vec{F}_m = -\frac{45(\mu_0\mu)^2\sigma\delta}{1024C^4}\dot{z}\vec{u}_z$$

Este resultado es de vital importancia para este trabajo, ya que lo que se ha obtenido es que la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el dipolo magnético puntual se expresa como la velocidad instantánea del dipolo, \dot{z} , multiplicada por un coeficiente cuyo valor está determinado por parámetros del sistema de valor constante. Por lo tanto, la fuerza magnética que actúa sobre el dipolo debido al campo producido por las corrientes inducidas en el tubo es proporcional al módulo de la velocidad; como además tiene sentido opuesto a la velocidad se puede concluir que es análoga a una fuerza de rozamiento viscoso, donde el coeficiente (obtenido en términos de los parámetros geométricos y de las propiedades físicas del sistema) sería el coeficiente de rozamiento viscoso equivalente, que en este trabajo se le denomina η .

Ya que lo que se busca es un coeficiente de fricción magnético η , que visto lo anterior tiene las mismas características que un rozamiento viscoso, siendo este:

$$\eta = \frac{45(\mu_0\mu)^2\sigma\delta}{1024C^4}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento se obtiene:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{45(\mu_0\mu)^2\sigma\delta}{1024C^4}\vec{v} + m\vec{g}$$

Formulando la componente z de esta ecuación diferencial en términos del módulo de la velocidad de caída $v(t) = -\dot{z}(t)$, la ecuación diferencial será:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = \eta v(t) - mg$$

3.3 Solución de la ecuación de movimiento: obtención de la velocidad terminal y el momento magnético del imán

Integrándose la ecuación de diferencial de primer orden con la condición inicial de velocidad $v(0) = 0$, se obtiene así la velocidad instantánea:

$$v(t) = \frac{mg}{\eta} \left(1 - e^{-\frac{\eta}{m}t}\right)$$

Si volvemos a integrar obtenemos la posición instantánea:

$$z(t) = z(0) - \frac{mg}{\eta} t - g \left(\frac{m}{\eta} \right)^2 \left(e^{-\frac{\eta}{m}t} - 1 \right)$$

De la solución de la ecuación de movimiento anterior se puede extraer los siguientes parámetros:

- **La velocidad terminal v_{lim} :** Velocidad máxima o límite que alcanzará el imán para instantes de tiempo significativamente mayores que el valor de un tiempo característico del sistema: de la constante de tiempo λ .

$$v_{lim} = \frac{mg}{\eta} = \frac{1024C^4mg}{45(\mu_0\mu)^2\sigma\delta}$$

- **La constante de tiempo λ (s):** Es una medida del tiempo característico del sistema, es decir, de la rapidez con la que evoluciona el sistema.

$$\lambda = \frac{m}{\eta}$$

- **Momento magnético del imán μ :** A partir de los parámetros del tubo, de la masa del imán y de la velocidad terminal de caída del imán, es posible obtener el valor del momento dipolor magnético característico del imán puntual, mediante la siguiente expresión:

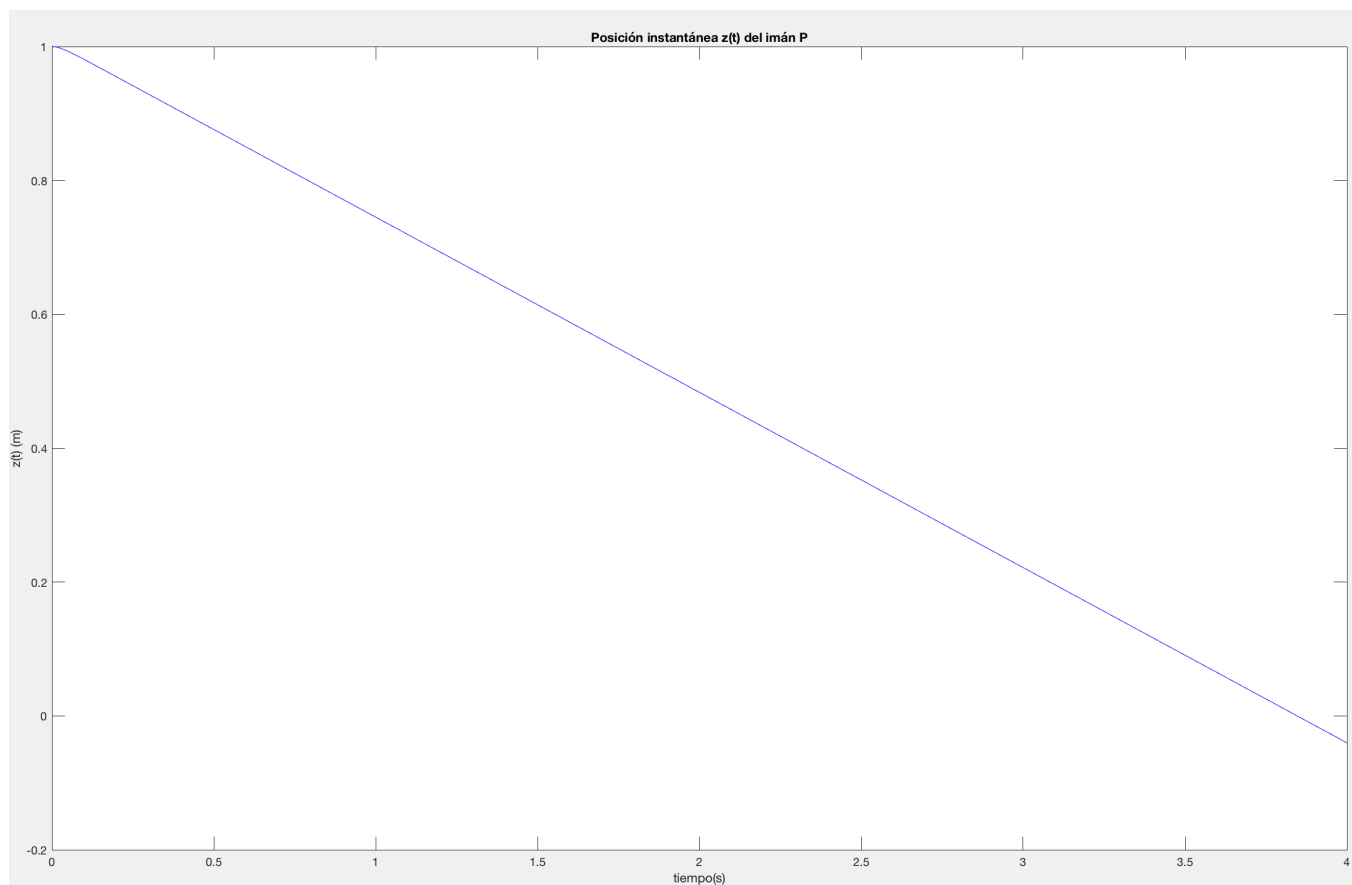
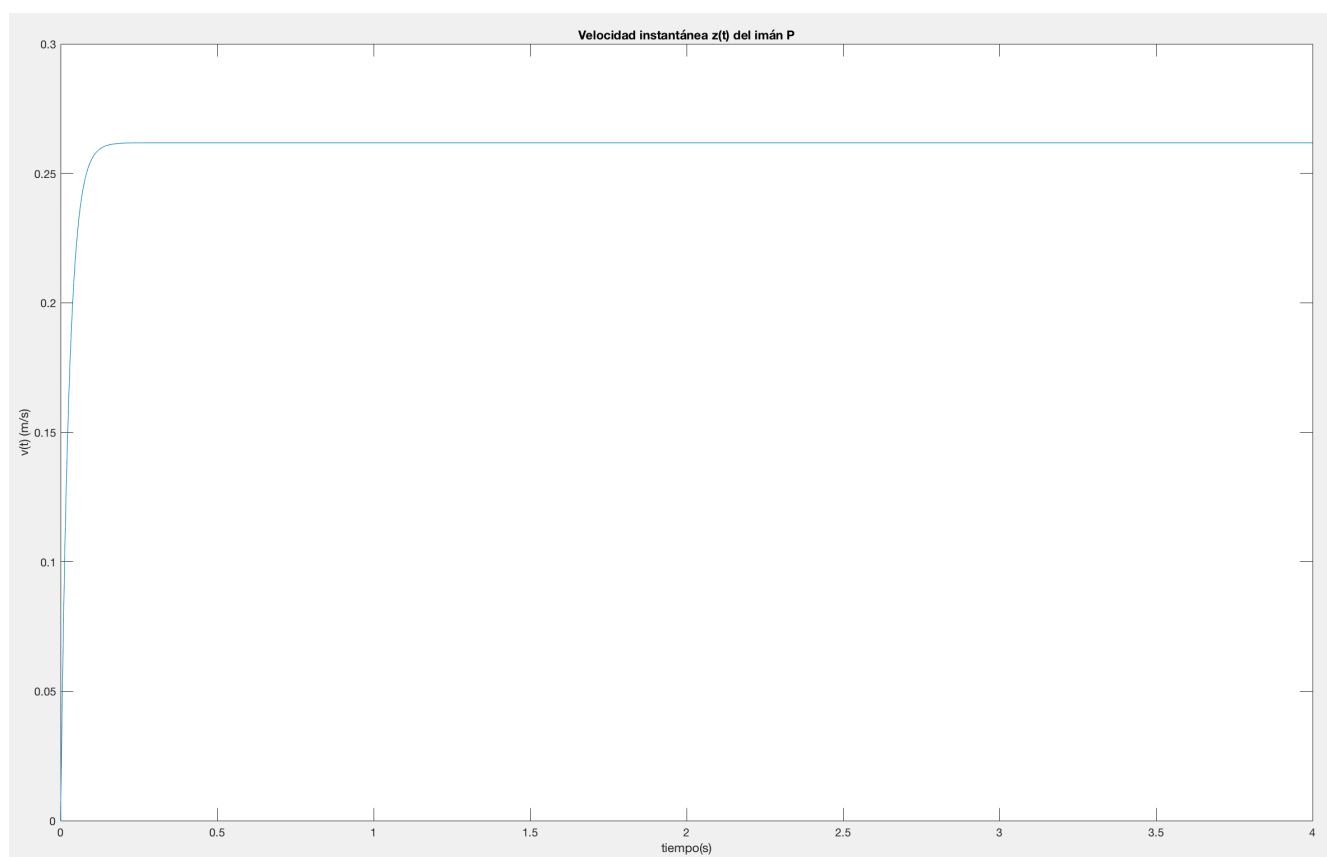
$$\mu = \frac{32C^2}{\mu_0} \sqrt{\frac{mg}{45 v_{lim}\sigma\delta}}$$

La ecuación de la velocidad instantánea y de la posición se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$z(t) = v_{lim}\lambda \left(\frac{t}{\lambda} - 1 + e^{-\frac{t}{\lambda}} \right)$$

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right)$$

A continuación, se representan las gráficas de la posición instantánea $z(t)$ y velocidad instantánea $v(t)$ del denominado “imán P” con sus datos obtenidos experimentalmente (esto se verá en el capítulo 5):

Figura 3-5: Posición instantánea $z(t)$ del imán P con el modelo de dipolo puntualFigura 3-6: Velocidad instantánea $v(t)$ del imán P con el modelo de dipolo puntual

Una consecuencia fundamental que podemos extraer y utilizar del resultado obtenido, es que de si en vez de un dipolo magnético puntual se tiene una sustancia magnetizada de geometría no puntual (por ejemplo, un anillo imantado), el fenómeno no puede ser muy diferente, por lo que la fuerza que actúa sobre la sustancia magnetizada no puntual también será equivalente a una fuerza de rozamiento viscoso. En este sentido, es de destacar que el comportamiento observado en el estudio experimental desarrollado en el capítulo 4, indica que la anterior puede ser una buena hipótesis de trabajo para una primera aproximación al problema del frenado magnético de un imán con geometría anular dispuesto alrededor de un tubo conductor vertical. Por tanto, en el siguiente capítulo se procederá a modelar dicho fenómeno en términos de una fuerza de frenado magnético análoga a una fuerza de rozamiento viscoso caracterizada por un coeficiente η que dependerá de las características geométricas y propiedades físicas del sistema.

4 CAÍDA DE UN IMÁN ANULAR

“Nada en la vida es para ser temido, es sólo para ser comprendido. Ahora es el momento de entender más, de modo que podamos temer menos”.
- Marie Curie -

Dado que en el capítulo anterior se ha demostrado que el imán puntual se ve sometido a una fuerza análoga a un rozamiento viscoso y que esta analogía también se cumplirá para un imán de geometría no puntual, en el caso concreto que se va a abordar a continuación, un imán de geometría anular.

En consecuencia, el modelo que describe el movimiento de dicho imán no puntual quedaría completamente caracterizado por el correspondiente coeficiente de rozamiento viscoso-magnético η , que dependerá de las características de físicas y de la geometría de tubo conductor e imán. Lo que ocurre es que la geometría no puntual de éste complica bastante llevar a cabo un análisis similar al realizado con el dipolo puntual (aunque se podría hacer, sin duda alguna). Por tanto, sabiendo que la fuerza magnética también ha de ser de la forma $\vec{F}_m = -\eta \cdot \vec{v}$, se puede calcular η realizando un análisis de los aspectos energéticos del fenómeno.

Por lo que en este capítulo se va a desarrollar el modelo de un imán anular cayendo por el exterior de un tubo metálico. En primer lugar, se partirá del potencial vector $d\vec{A}_\phi$ asociado a una cinta de corriente diferencial hasta llegar a variación de flujo respecto a z y por superposición de dos cintas conseguir la geometría buscada.

Acto seguido, esta expresión se relacionará con el potencial vector \vec{A} respecto a z y esta a su vez con el campo eléctrico \vec{E} , el cual se necesitará posteriormente para la obtención de la buscada η , mediante análisis energéticos, dada la complejidad de abordarse de la misma forma que en el caso que el dipolo puntual, por dos caminos distintos que llegan a la misma conclusión.

4.1 Cálculo de la f.e.m inducida por el imán anular en movimiento y sus derivadas

Se parte de \vec{A}_ϕ asociada a la una cinta de corriente en forma diferencial y a partir de allí obtenemos el flujo magnético ϕ_m a través de la superficie que se apoya en la curva cerrada Γ :

$$\phi_m = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Se utiliza la hipótesis de pequeño espesor en las paredes del tubo y usamos su radio medio C definido previamente para hacer la circulación en el tubo:

$$d\phi_m(z) = 2\pi C \, d\vec{A}_\varphi(a, \rho = C, z, z')$$

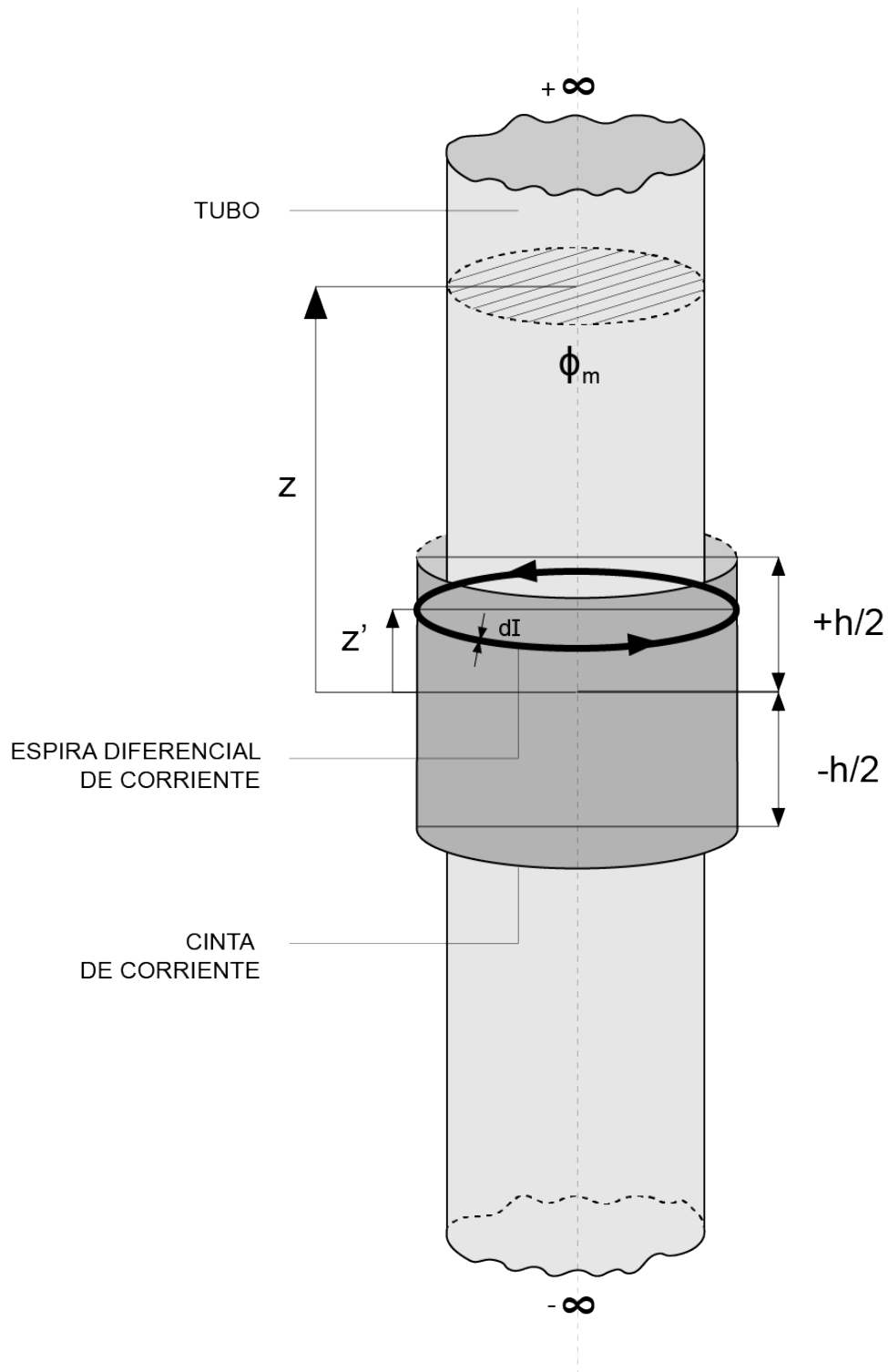


Figura 4-1: Esquema de la espira diferencial y de la cinta de corriente por fuera del tubo infinito, y de la representación de las variables z y z'

Acto seguido se usará una función $\vec{F}(a, \rho, z, z')$ que posteriormente utilizaremos para integrarla y que se relación con $d\vec{A}_\varphi$ de la siguiente forma:

$$\vec{F}(a, \rho, z, z') \cdot dz' = d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z')$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y con la altura de la cinta (imán) siendo h , se integra en su altura simétricamente respecto al centro del imán:

$$\phi_m(z) = 2\pi C \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \vec{F}(a, \rho = C, z, z') dz'$$

Llegados aquí se utiliza la ley de Faraday y se hace separación de variables:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} v$$

Analizando la ecuación se ve que el siguiente paso es derivar ϕ_m respecto a z ya que se necesita para obtener la fuerza electromotriz inducida. Para hacer esto será necesario derivar todos los términos del $d\vec{A}_\varphi$, incluidos las integrales elípticas.

$$\begin{aligned} d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z') &= \frac{\mu_0 M_0 dz'}{2\pi\rho} \left(\left(\frac{\rho^2 + a^2 + (z - z')^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}} \right) K(k) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2} \right) E(k) \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Con k siendo:

$$k = \frac{4\rho a}{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}$$

Para ello se volverá a hacer separación de variables de la siguiente forma:

$$\frac{\partial K(k)}{\partial z} = \frac{\partial K(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E(k)}{\partial z} = \frac{\partial E(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z}$$

Las derivadas de las integrales elípticas de primera y segunda especie respecto a k son [21]:

$$\frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} \left(\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right)$$

$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} (E(k) - K(k))$$

Para acortar la extensión de la fórmula se llamará “*termK*” y “*termE*” a los conjuntos de términos que acompañan respectivamente a la integral elíptica de primera especie $K(k)$ y de segunda especie $E(k)$ en la fórmula de dA_φ : En el anexo se encuentra el código de Matlab con la resolución paso a paso y la función completa.

$$termK = \left(\frac{\rho^2 + a^2 + (z - z')^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}} \right)$$

$$termE = \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2} \right)$$

Quedando finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d\vec{A}_\varphi)}{\partial z} = & \frac{\mu_0 M_0 dz'}{2\pi\rho} \left[\frac{\partial(termK)}{\partial z} K(k) + \frac{(termK)}{k} \left(\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right) \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{\partial(termE)}{\partial z} E(k) \right. \\ & \left. - \frac{(termE)}{k} (E(k) - K(k)) \frac{\partial k}{\partial z} \right] \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Y ahora volviendo a la derivada de ϕ_m respecto a z :

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = \mu_0 M_0 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \vec{F}(a, \rho = C, z, z')}{\partial z} \cdot dz'$$

Esta sería la derivada del flujo magnético respecto a z asociado a una cinta de corriente. La integral respecto a dz' no se resuelve hasta el final por ser más sencillo a la hora de su cálculo numérico.

Como se ha mencionado en el subapartado del imán anular, este se obtiene por superposición de dos cintas de corriente.

$$\vec{A}_{Total\ Anillo} = \vec{A}_{cinta\ externa} + \vec{A}_{cinta\ interna}$$

Como se puede hacer superposición con los potenciales vector \vec{A} , también se puede hacer con las variaciones de flujo respecto a z de las dos cintas de corriente, para obtener la variación de flujo asociada a un imán con geometría anular:

$$\frac{\partial \phi_{Total\ Anillo}}{\partial z} = \frac{\partial \phi_{cinta\ externa}}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{cinta\ interna}}{\partial z}$$

Y la relación con el potencial vector \vec{A} respecto a z es:

$$\frac{\partial \vec{A}_{Total\ Anillo}}{\partial z} = \frac{1}{2\pi C} \cdot \frac{\partial \phi_{Total\ Anillo}}{\partial z}$$

Una vez llegado hasta aquí se necesita continuar con los métodos energéticos para llegar a la obtención de la buscada constante de fricción magnética η .

4.2 Análisis de los aspectos energéticos

Tanto en el estudio experimental del fenómeno de frenado magnético bajo estudio, como en el estudio teórico del caso simple del dipolo puntual cayendo por el tubo, se puede comprobar que la fuerza magnética de frenado puede modelarse como una fuerza de rozamiento viscoso proporcional a la velocidad de movimiento y opuesta a ésta $F_m = \eta v$.

Por eso, en primera aproximación, se establece como objetivo la obtención de la constante de proporcionalidad; es decir, el coeficiente de viscosidad equivalente. Y una forma relativamente simple de hacerlo es mediante la evaluación de los aspectos energéticos: la potencia desarrollada por esta fuerza magnética o de rozamiento equivalente es igual al producto escalar de dicha fuerza por la velocidad. Es decir, como dicha fuerza de frenado magnético es opuesta a la velocidad, la potencia de la fuerza de frenado es negativa, por que se trata de una pérdida de energía por unidad de tiempo.

Y puesto que el único mecanismo de pérdida de energía existente en el sistema es el efecto Joule debido a las corrientes eléctricas inducidas en el conductor por el campo magnético del imán en movimiento, el valor absoluto de la potencia de la fuerza de frenado P_m debe ser igual a la potencia disipada por efecto Joule P_{joule} . Como se sabe, la ley de Ohm en el conductor lleva a que dicha potencia disipada dependerá de la conductividad del medio y del cuadrado de la intensidad del campo eléctrico \vec{E} .

En esta subsección el objetivo será obtener el campo eléctrico \vec{E} inducido de dos formas distintas. En la primera forma se deduce inmediatamente de la ecuación de Faraday-Maxwell; en la segunda, se calculan primero las corrientes inducidas en el tubo en virtud de la ley de Faraday, y luego, la ley de Ohm permite calcular el campo eléctrico en cada punto como la densidad de corriente que describe la distribución de éstas en el tubo dividida por la conductividad. El resultado es el mismo, que el campo eléctrico inducido está directamente relacionado con la velocidad multiplicada por la derivada con respecto a z del potencial vector magnético \vec{A}_ϕ .

4.2.1 Primera forma: Ecuación de Faraday - Maxwell

Partiendo del diferencial de potencia disipada debido al efecto Joule en el conductor:

$$dP_{disp} = E J \partial V$$

Se pone la expresión en forma integral para conocer la potencia total disipada en el tubo durante el movimiento de caída del imán respecto a él:

$$P_{disp} = \int_{V_{Tubo}} \sigma E^2 \cdot \partial V$$

Ya que se requiere el campo eléctrico \vec{E} , continuación se obtiene la relación entre el potencial vector \vec{A} y el campo eléctrico \vec{E} , mediante la Ley de Faraday-Maxwell, tal y como se expuso en el capítulo 1 pero entrando más en detalle en su desarrollo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

Ya que en el caso particular tratado no existen cargas eléctricas, el potencial escalar vale cero:

$$\vec{\nabla} \phi = 0$$

Y finalmente obtenemos la relación buscada:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Haciéndose separación de variables:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = -v \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

Y sustituyendo la expresión del campo eléctrico anterior en la ecuación de potencia disipada, se obtiene esta en función de A_φ :

$$P_{disp} = v^2 \int_{V_{Tubo}} \sigma \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot \partial V$$

Por su parte, la potencia de la fuerza de frenado (equivalente a un rozamiento viscoso) es:

$$P_m = \frac{d(W_m)}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = -\eta |\vec{v}|^2 < 0$$

Según se discutió anteriormente, identificando el mecanismo de pérdida de energía del sistema con la disipación de energía por efecto Joule en el conductor, se deberá cumplir la relación:

$$|P_m| = P_{disp}$$

$$\eta v^2 = v^2 \int_{V_{Tubo}} \sigma \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot \partial V$$

Simplificando desaparecen los cuadrados de las velocidades, v^2 , a ambos lados de la ecuación quedando finalmente la expresión buscada de η en función de A_φ :

$$\eta = \int_{V_{Tubo}} \sigma \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot \partial V$$

4.2.2 Segunda forma: Aplicando la Ley Ohm y la Ley de Joule

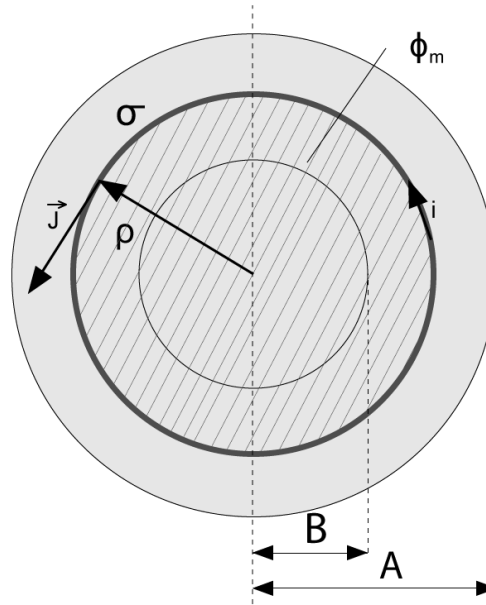


Figura 4-2: Esquema de la sección transversal del tubo, en que aparece la densidad de corriente inducida recorrida por una línea de corriente respecto a ρ

En primer lugar, se calculan las corrientes inducidas en una espira de corriente diferencial del tubo con la Ley de Faraday y la Ley de Ohm:

$$\vec{J} = \frac{i}{ds} \vec{u}_\varphi = \sigma \vec{E}$$

$$-\left. \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right|_z = -\left. \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \right|_z v = i(\rho) \cdot r(\rho)$$

La expresión de la resistencia del tubo es la siguiente:

$$R_{Tubo} = \frac{L}{S \cdot \sigma}$$

Poniéndola en forma diferencial se obtiene la resistencia correspondiente a la región conductora recorrida por una línea de corriente en ρ :

$$r(\rho) = \frac{2\pi\rho}{dS\sigma}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$-\frac{\partial\phi_m}{\partial z}\Big|_z v = \frac{i(\rho)}{dS} \cdot \frac{2\pi\rho}{\sigma} = \frac{\vec{J}(\rho)}{\sigma} 2\pi\rho$$

$$\vec{J}(\rho) = -\frac{\sigma}{2\pi\rho} \cdot \frac{\partial\phi_m}{\partial z}\Big|_z v \vec{u}_\varphi = \sigma \vec{E}$$

Despejando el campo eléctrico \vec{E} :

$$\vec{E}(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi\rho} \cdot \frac{\partial\phi_m}{\partial z}\Big|_z v \vec{u}_\varphi$$

Aplicando la fórmula del flujo magnético en función del potencial vector \vec{A}

$$\phi_m = \oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Y relacionando la variación de flujo magnético respecto a z con la variación de A_φ respecto a z:

$$\frac{\partial\phi_m}{\partial z} = 2\pi\rho \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

Se obtiene finalmente la expresión del campo eléctrico en función de la variación de A_φ respecto a z:

$$\vec{E}(\rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} v \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{dP_{disp}}{\partial V} = p_{disp} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma |\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma}$$

Identificando ahora la potencia disipada por efecto Joule en todo el tubo con la potencia (en valor absoluto) de la fuerza de frenado magnético, se llega a la misma expresión para el coeficiente de frenado η :

$$\eta = \int_{V_{Tubo}} \sigma \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot \partial V$$

4.3 Caída de un imán anular en un tubo finito

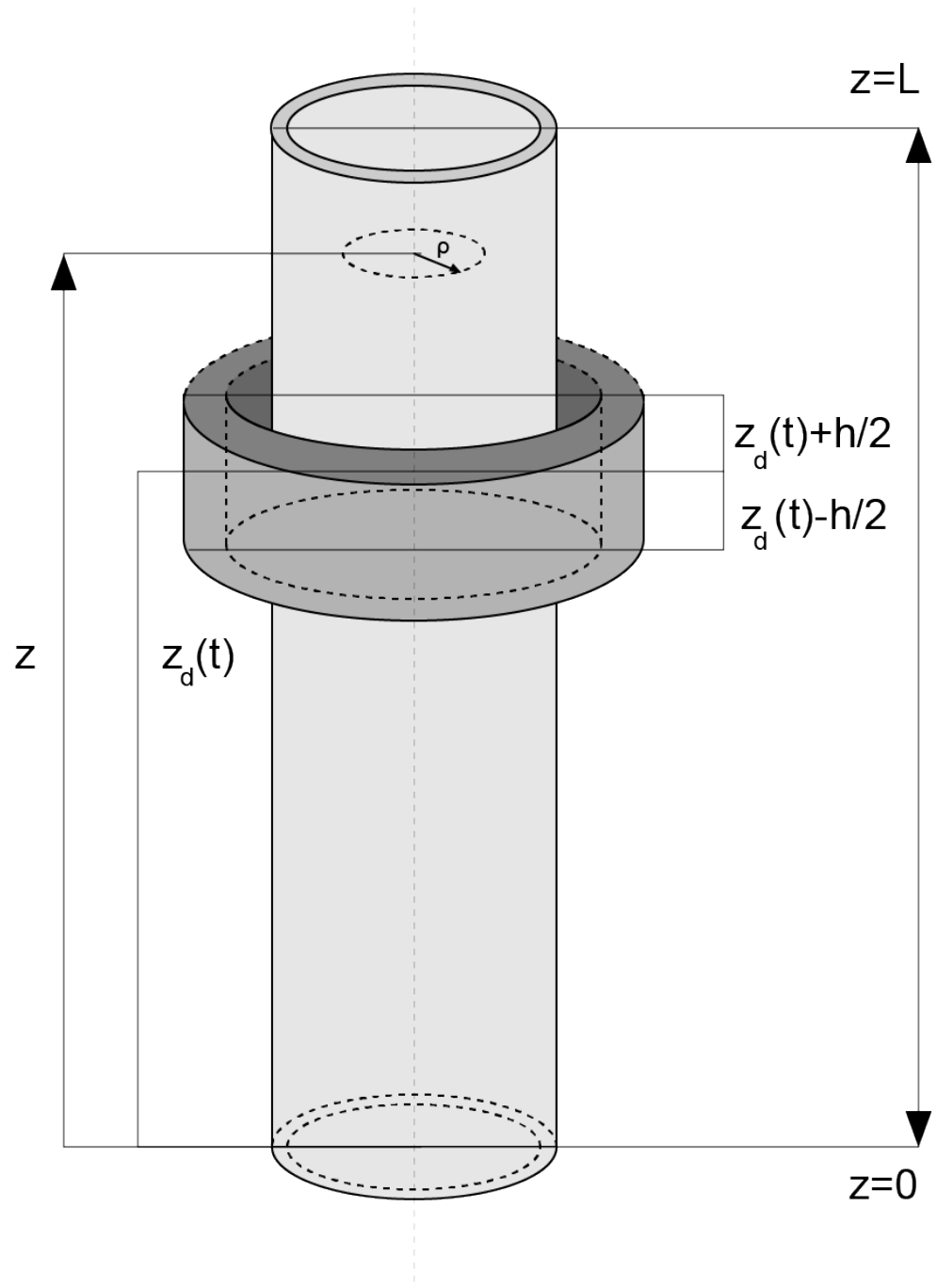


Figura 4-3: Esquema de un imán anular cayendo por fuera de un tubo finito y la representación de la nueva variable $z_d(t)$ añadida al modelo

Partiendo de la expresión de $d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z', z_d(t))$ obtenida anteriormente (en la sección 2.1.4.):

$$\begin{aligned}
d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z', z_d(t)) \\
= \frac{\mu_0 M_0 dz'}{2\pi\rho} \left(\left(\frac{\rho^2 + a^2 + (z - z' - z_d)^2}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z' - z_d)^2}} \right) K(k) \right. \\
\left. - \left(\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z' - z_d)^2} \right) E(k) \right) \vec{u}_\varphi
\end{aligned}$$

Siendo k :

$$k = \frac{4\rho a}{(\rho + a)^2 + (z - z' - z_d)^2}$$

Se realiza el proceso análogo al del tubo infinito, con los siguientes cambios. La función F que se utiliza para integrarla pasa a ser:

$$\vec{F}(a, \rho, z, z', z_d(t)) \cdot dz' \vec{u}_\varphi = d\vec{A}_\varphi(a, \rho, z, z', z_d) \vec{u}_\varphi$$

El flujo magnético se tiene:

$$\phi_m(z) = 2\pi C \int_{z_d(t) - \frac{h}{2}}^{z_d(t) + \frac{h}{2}} F(a, \rho = C, z, z', z_d) \cdot dz'$$

Y la variación de flujo respecto a z :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} &= \mu_0 M_0 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \vec{F}(a, \rho = C, z, z')}{\partial z} \cdot dz' \\
\frac{\partial \phi_{Total Anillo}}{\partial z} &= \frac{\partial \phi_{cinta externa}}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{cinta interna}}{\partial z}
\end{aligned}$$

Una vez obtenida esta última se podría obtener la η como en el modelo anterior:

$$\eta = \int_{V_{Tubo}} \sigma \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot \partial V$$

Y modificando los límites de integración para el caso concreto de tubo finito:

$$\eta = 2\pi \int_B^A d\rho \int_0^L \sigma \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot dz$$

Siendo A y B respectivamente los radios exterior e interior del tubo y L su altura.

5 PARTE EXPERIMENTAL

“Ninguna cantidad de experimentación puede probar definitivamente que tengo razón; pero un solo experimento puede probar que estoy equivocado”.
- Albert Einstein -

Realizados los modelos teóricos del dipolo puntual y de un imán con geometría anular con sus correspondientes soluciones asociadas, se comenzará con el análisis de los resultados experimentales. Tales resultados serán clave para comprobar si las soluciones teóricas obtenidas anteriormente y las hipótesis realizadas han sido correctas a la hora de aproximarnos al modelo físico real.

Las medidas fundamentales son la medida de la velocidad media de caída del imán y la de su imanación, aunque también son necesarias otras medidas para poder caracterizar completamente los modelos teóricos.

Las medidas se realizarán para dos imanes distintos, a los que denominaremos por sencillez “imán G” e “imán P”, que se dejarán caer por un mismo tubo metálico de cobre. Los aparatos necesarios para realizar las medidas, la forma de proceder y las hipótesis y acciones tomadas a la hora de analizar los datos serán expuestas en profundidad en cada apartado.



Figura 5-1: Imán G



Figura 5-2: Imán P

5.1 Medidas

5.1.1 Medidas de la geometría y masa

Para comenzar, se realiza un pesaje de los dos imanes que se utilizarán en los experimentos. Esto se realizará con una báscula de precisión. Hay que aclarar que en el caso del “imán P” hay que añadirle un trozo de un material ligero para que los aparatos de medida en la caída del imán pudieran detectarlo correctamente, por lo que se medirá con el material añadido y sin él.



Figura 5-3: Báscula de precisión

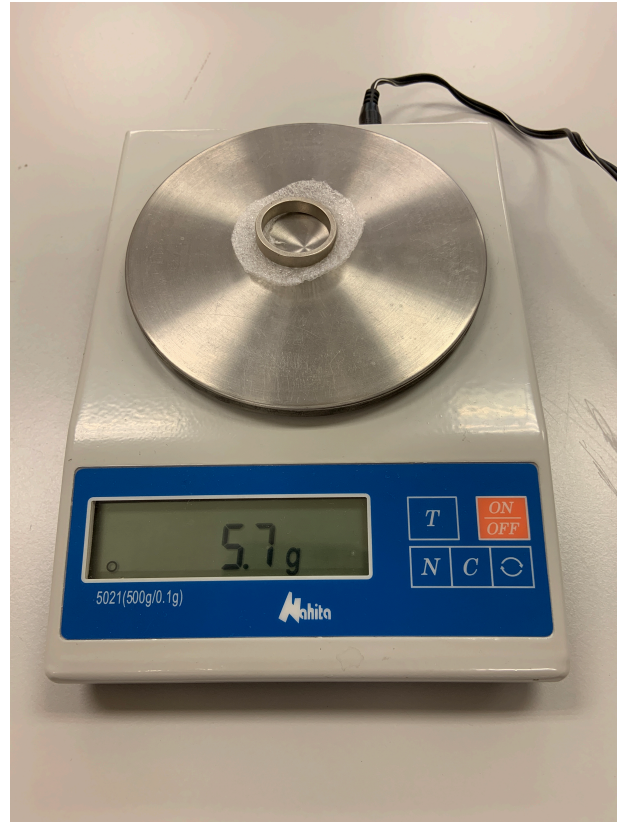


Figura 5-4: Detalle del material añadido al imán chico

Los pesos de cada uno de los imanes junto con el error asociado a la sensibilidad de la báscula son:

- Imán G: 28.6 gramos ($\pm 0.1g$)
- Imán P: 5.6 gramos($\pm 0.1g$) (sin material) y 5.7 gramos($\pm 0.1g$) (con el material)

En cuanto a la geometría de los imanes, esta fue realizada con un calibre para corroborar los datos que nos aportaba el fabricante. La tolerancia en la medida asociada al calibre es de ($\pm 0.05mm$) Las medidas son las siguientes:

- Imán G:
 - Diámetro exterior: 40 mm
 - Diámetro interior: 25 mm
 - Altura: 5mm
 - Volumen: $(3,83 \pm 0.05) \cdot 10^{-6}(m)^3$
- Imán P: diámetro exterior:
 - Diámetro exterior: 26 mm
 - Diámetro interior: 22 mm
 - Altura: 5mm
 - Volumen: $(0.754 \pm 0.01) \cdot 10^{-6}(m)^3$

Por último, quedaría determinar la geometría del tubo de cobre utilizado($\pm 0.05mm$):

- Diámetro exterior: 20 mm
- Diámetro interior: 18 mm
- Altura: 1 m

5.1.2 Medida del campo magnético

A continuación, se lleva a cabo de una de las medidas más importantes, ya que necesitamos conocer el momento magnético de cada uno de los imanes para obtener soluciones en los modelos teóricos. El Sistema de medición utilizado está constituido por:

- Teslámetro
- Dos instrumentos de sujeción
- Una regla geométrica en la que se puede fijar el teslámetro y desplazar el imán en el eje

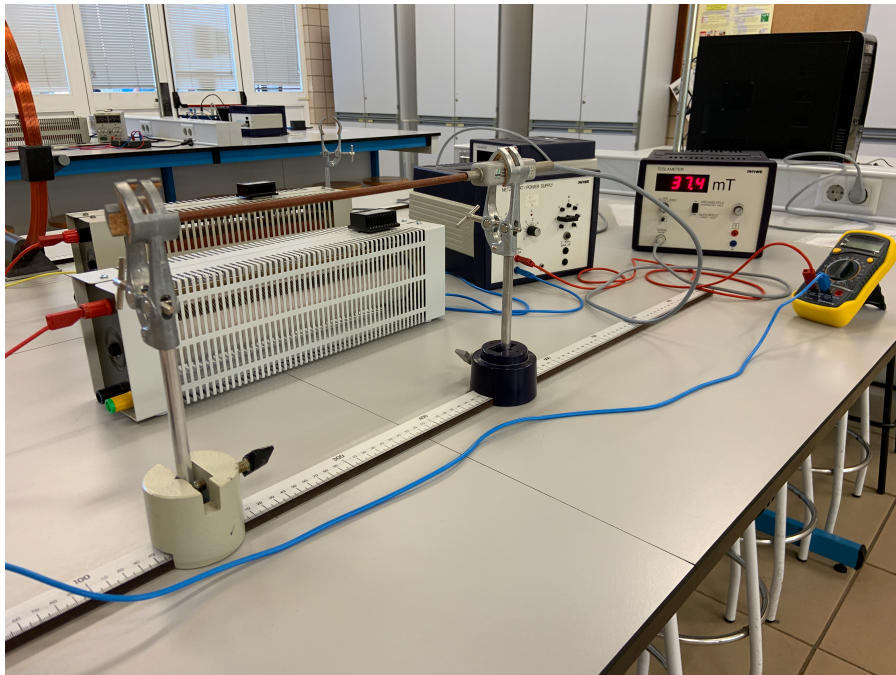


Figura 5-5: Componentes de medición del campo magnético del imán

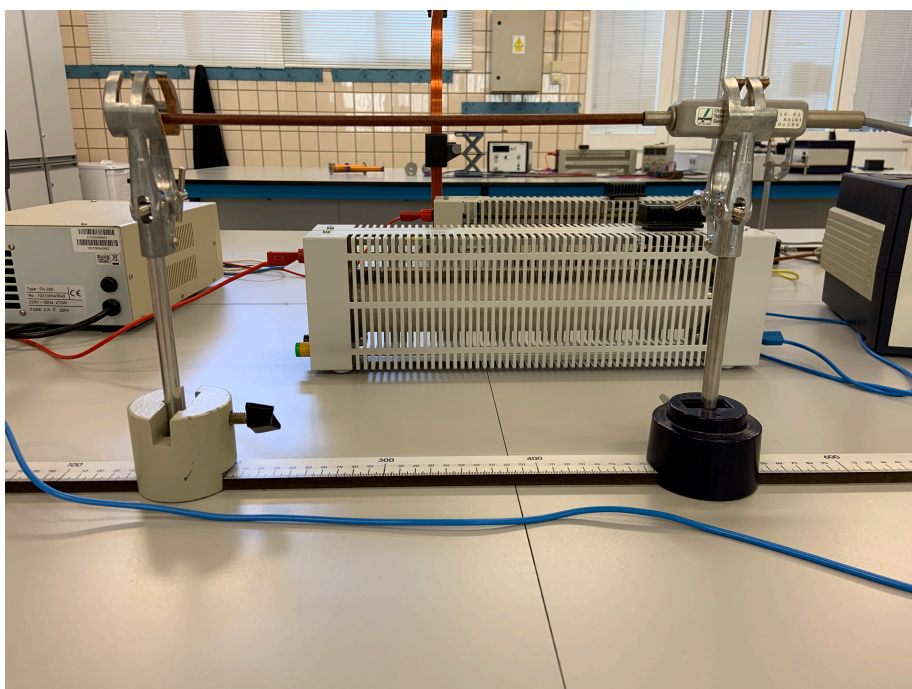


Figura 5-6: Detalle de la situación de la sonda del teslámetro

En primer lugar, colocamos el imán en uno de los aparatos de sujeción y el teslámetro en el otro. Calibramos el teslámetro el campo medido a cero sin imán y después ajustamos la sonda Hall del teslámetro para que coincida lo más posible al eje de simetría del imán, posicionando el extremo de la sonda aproximadamente en la superficie de la cara del imán. A continuación, empezamos a tomar las medidas, desplazando el imán con respecto a la sonda con una variación inicial de 1mm, realizando un barrido de 20 cm aproximadamente. Hay que puntualizar que a medida que el imán se alejaba de la sonda y las medidas variaban más lentamente, se fue incrementando la variación en la medida pasando del 1 mm inicial, a 2 mm, a 5 mm hasta a 1 cm de variación, teniendo esto en cuenta en los análisis de datos posteriores. A continuación, se exponen algunos datos obtenidos (los datos completos se encuentran en el anexo de tablas):

Tabla 1: Algunos datos del imán G respecto a la sonda

z(mm)	B(mT)
0	80.2
1	69.5
2	61.3
3	46.9
4	35.5
5	26.1
6	18
7	9.3
8	3.1
9	-1.9
10	-6.5

Tabla 2: Algunos datos del imán G respecto a la sonda

z(mm)	B(mT)
0	31.5
1	25
2	17.9
3	13
4	7.3
5	3.2
6	-0.3
7	-3
8	-4.5
9	-5.9
10	-6.6

Una vez se han obtenido los datos se está en disposición de averiguar el momento magnético del imán, pero para ello primero se debe obtener la imanación anteriormente. El procedimiento por realizar será hacer una interpolación no lineal mediante el programa MATLAB®, usando una función del programa llamada “nlinfit” que nos permite utilizar una función modelo para ello. Esta función modelo es una función teórica que nos proporciona el campo magnético de un imán anular a una distancia z de su eje de simetría [22], asumiendo como hipótesis que el imán tiene una imanación uniforme (es decir constante) en la dirección y sentido del eje coaxial del anillo.

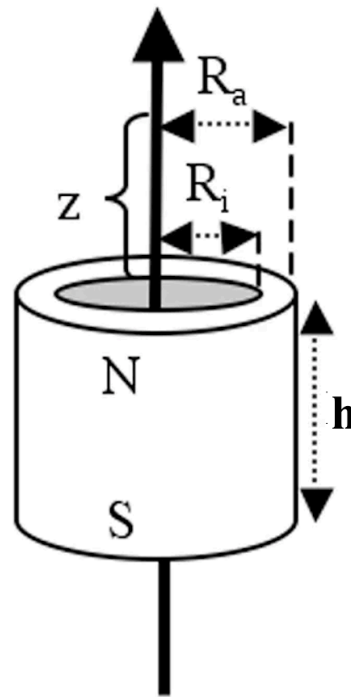


Figura 5-7: Esquema de la ecuación teórica para obtener B_r
Imagen obtenida de [22]

$$B = \frac{B_r}{2} \left[\frac{h+z}{\sqrt{R_a^2 + (h+z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_a^2 + z^2}} - \left(\frac{h+z}{\sqrt{R_i^2 + (h+z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right) \right]$$

Los componentes de la ecuación son los siguientes:

- B_r : Campo magnético remanente, independiente de la geometría del imán
- z : Distancia desde la cara del polo en el eje de simetría
- h : Altura del imán
- R_a =Radio externo del imán
- R_i =Radio interno del imán

Se utiliza la ecuación teórica como modelo para interpolar los datos experimentales, obteniéndose muy buenos resultados. También hay que añadir que se ha probado a cambiar los valores iniciales de interpolación, no produciéndose efecto alguno en el resultado y convergiendo siempre al mismo.

A continuación, se expondrán las gráficas comparando las medidas experimentales y las obtenidas mediante interpolación:

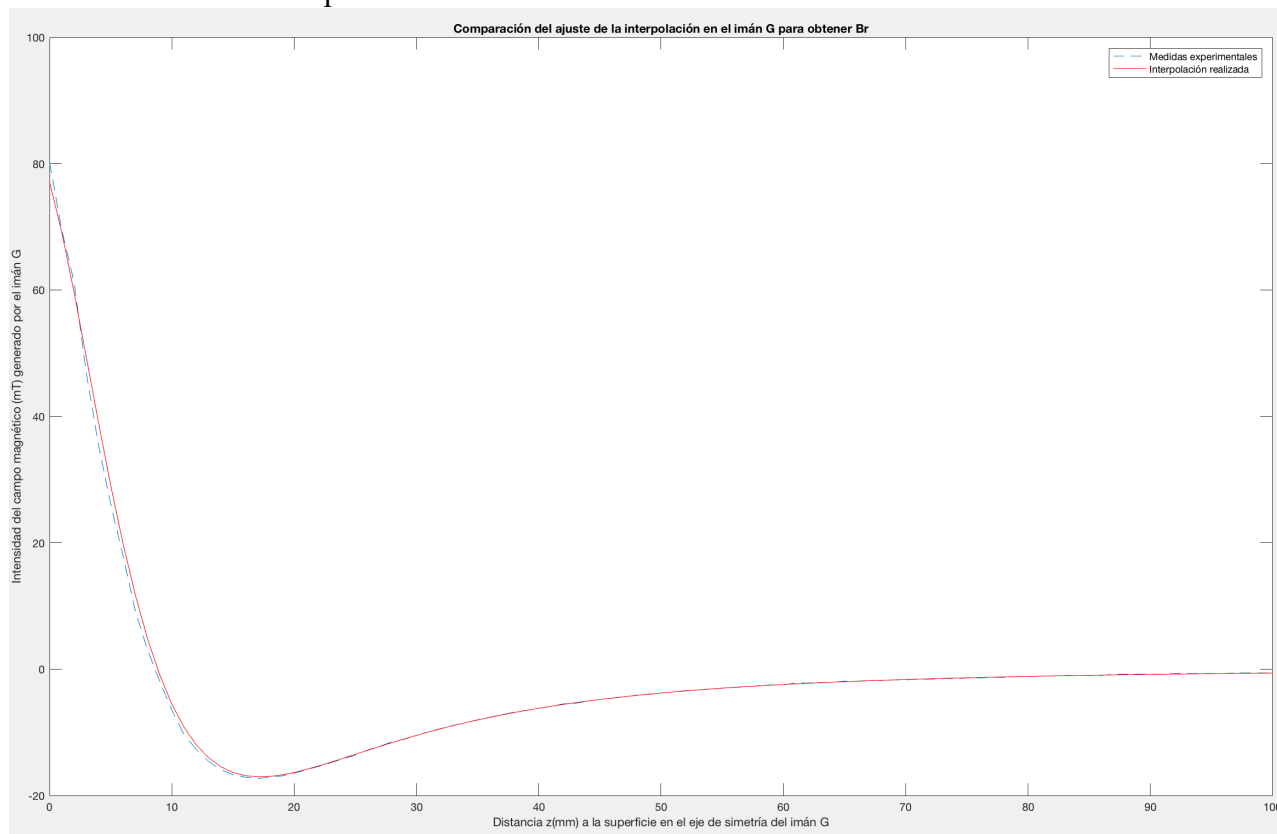


Figura 5-8: Comparación del ajuste de la interpolación con respecto a los datos experimentales en el imán G

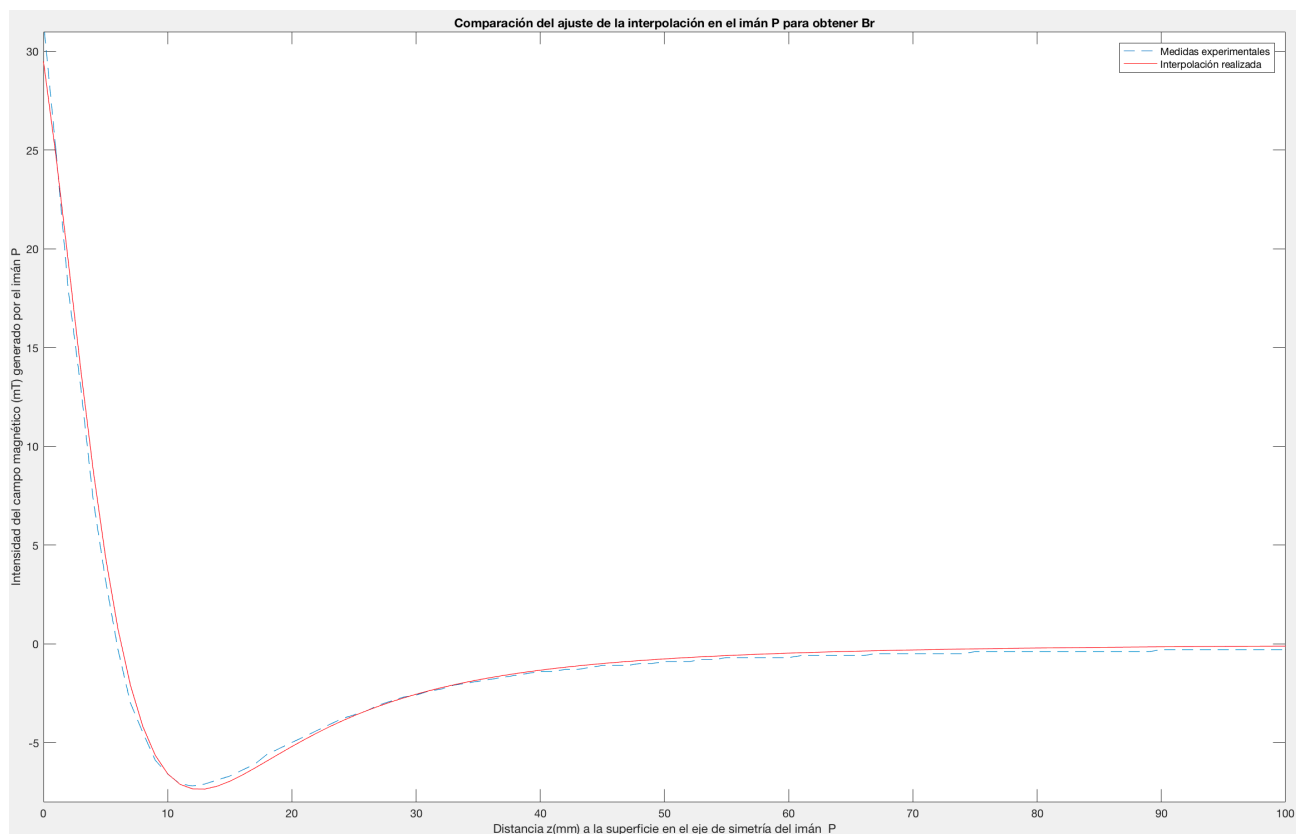


Figura 5-9: Comparación del ajuste de la interpolación con respecto a los datos experimentales en el imán P

De estas interpolaciones sacamos las B_r incógnitas de cada uno de los imanes:

- $B_r (\text{Imán G}) = 1.1963 \text{ T} (\pm 0.0003 \text{ T})$
- $B_r (\text{Imán P}) = 1.0759 \text{ T} (\pm 0.0005 \text{ T})$

La función utilizada ('nlinfit') nos aporta datos sobre el error del parámetro obtenido de la interpolación y son casi despreciables, por lo que se puede decir que se ha conseguido una buena aproximación.

Por otro lado, estos valores han sido corroborados en catálogos de imanes de neodimio [23] y entran dentro de los valores normales, por lo que reafirma la validez y aproximación del método utilizado.

Una vez determinado el campo de inducción remanente en cada uno de los imanes, podemos calcular la imanación de los imanes en cada caso. Como se indicó anteriormente, el campo de magnetización o imanación en ambos imanes es de la forma

$$\vec{M} = M_0 \cdot \vec{u}_z$$

La intensidad de la densidad de flujo remanente B_r es proporcional a la imanación M_0 , donde el valor de la constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades utilizado. Si éste es el SI (sistema internacional de unidades), la constante de proporcionalidad entre ambas magnitudes es la constante de permeabilidad del vacío. Es decir, si B y B_r se miden en teslas (T) y la imanación M_0 en amperios por metro (A/m), se tendrá:

$$B_r = \mu_0 \cdot M_0$$

- $M_0 (\text{Imán G}) = (9.5199 \pm 0.0002) \cdot 10^5 \text{ (A/m)}$
- $M_0 (\text{Imán P}) = (8.5625 \pm 0.0004) \cdot 10^5 \text{ (A/m)}$

Una vez obtenida la imanación uniforme M_0 de cada imán se procede a obtener el momento dipolar del imán, que se obtendrá multiplicando por el volumen del imán obteniendo:

$$\vec{\mu} = \int_{\partial V} \vec{M}_0 \cdot dV = \pi \cdot h \cdot (a^2 - b^2) \cdot M_0 \cdot \vec{u}_z$$

Finalizando el objetivo de este apartado, obtenemos el momento dipolar magnético de cada imán:

- $\mu (\text{Imán G}) = 3.6450 (\pm 0.0476) \text{ (A} \cdot \text{m}^2) \text{ siendo } V_G = (3.83 \pm 0.05) \cdot 10^{-6} \text{ (m)}^3$
- $\mu (\text{Imán P}) = 0.6456 (\pm 0.0086) \text{ (A} \cdot \text{m}^2) \text{ siendo } V_P = (0.754 \pm 0.01) \cdot 10^{-6} \text{ (m)}^3$

5.1.3 Medida del tiempo de caída

A continuación, se describirá el sistema de medida para el tiempo de caída, posteriormente el procedimiento a la hora de tomar las medidas y por último el tratamiento de los datos obtenidos.

El sistema está compuesto por:

- 2 aparatos de medición PHYWE timer 4-4 con 4 contadores de tiempo cada uno (sensibilidad aparato $\pm 0.001s$)
- Cables de conexión
- 9 sensores de movimiento dispuestos a $9,85cm(\pm 0.2cm)$
- Barra y pie soporte
- Pinzas
- Tubo metálico de cobre
- Una porción de goma espuma a modo de amortiguación para la caída del imán

Una vez montado el sistema de medición, se procede a la colocación del tubo, pretendiéndose la mayor verticalidad posible y colocándose entre los sensores de movimiento para que estos puedan captar el paso del imán. En cuanto al funcionamiento, al soltar el imán desde el extremo del tubo, cuando pasa completamente por el primer sensor, este inicia el contador de tiempo en los ocho contadores conectados a sus respectivos sensores, los cuales se irán deteniendo a medida que el imán vaya pasando a través de ellos. Por lo que se obtienen medidas discretas en ocho puntos equiespaciados del tiempo en el que el imán tarda en atravesar cada uno de ellos. Con estos datos se puede calcular tanto la posición como la velocidad que experimenta el imán en función del tiempo.

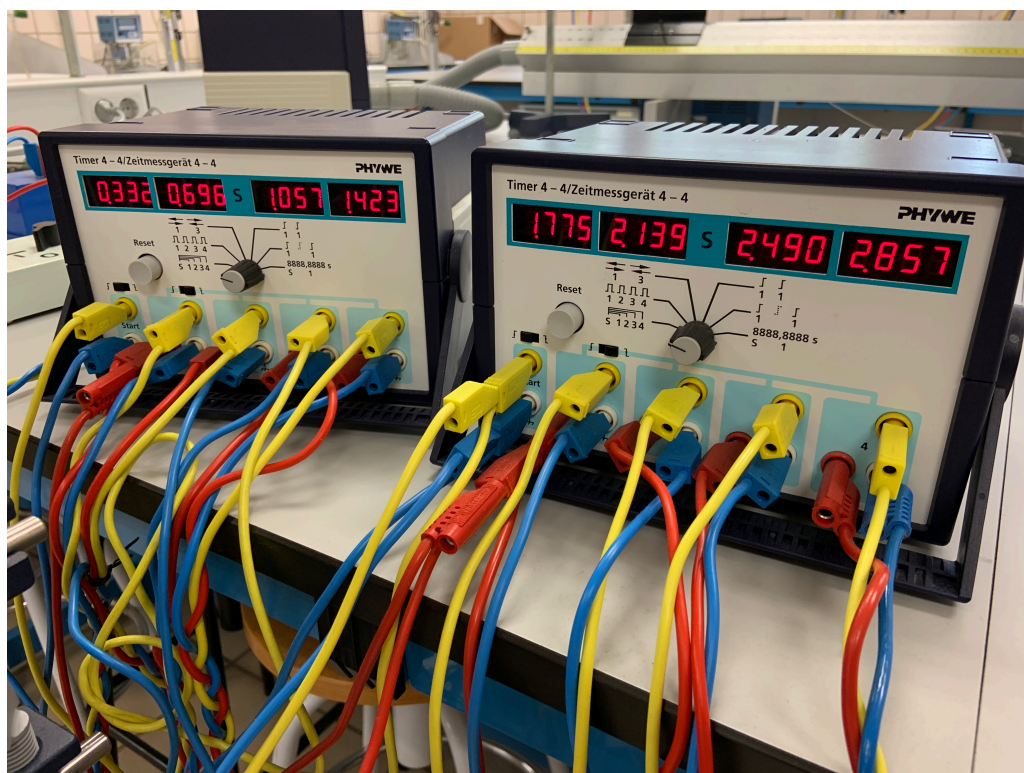


Figura 5-10: Aparatos de medición PHYWE timer 4-4

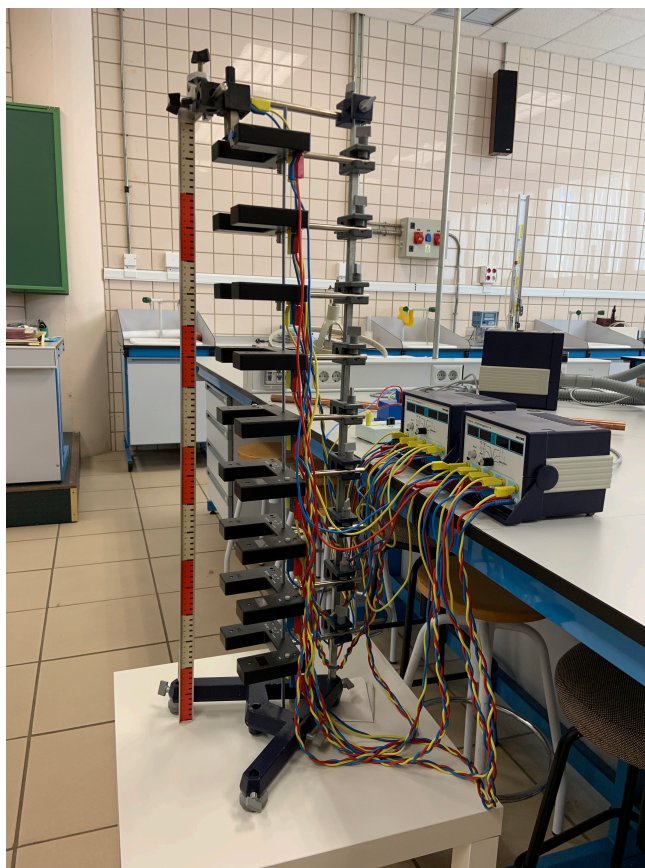


Figura 5-11: Sistema de medición del tiempo de caída

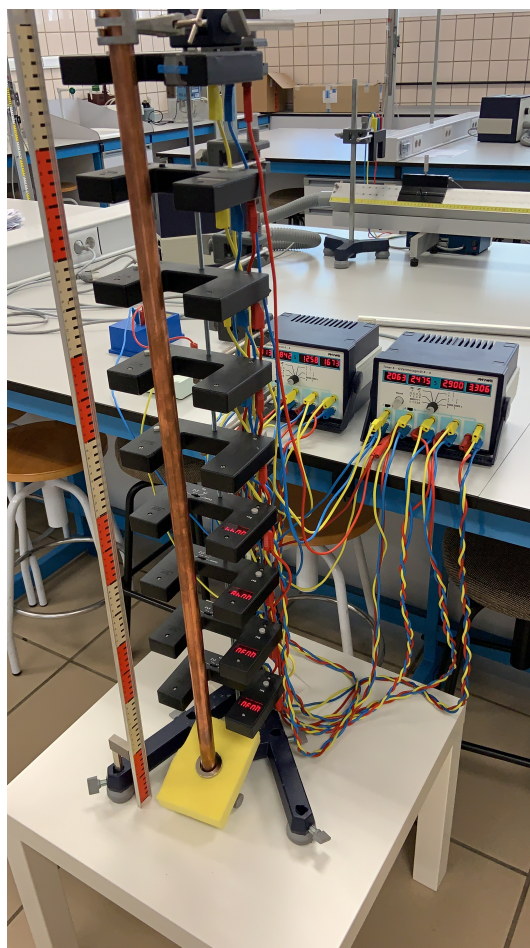


Figura 5-12: Sistema de medición de medida con el tubo e imán montados

Finalizado el proceso de montaje y calibrado se procede a realizar las medidas. Hay que destacar que en el caso del “imán P”, como se mencionó anteriormente, hay que colocarle un pequeño material ligero alrededor del anillo para que este pueda ser correctamente detectado por los sensores, ya que de lo contrario algún sensor no percibiría su paso y tendríamos unas medidas de la caída incompletas. Se decide hacer cinco experimentos con cada imán, se consideran suficientes dada la gran homogeneidad en los datos obtenidos en cada uno de los ensayos.

A continuación, se exponen las tablas con las medidas obtenidas y corregidas debidas a los errores de medición:

	Imán G							
	Contadores de tiempo (segundos) ($\pm 0.001s$)							
Nº de Experimento	1	2	3	4	5	6	7	8
1º	0.413	0.842	1.258	1.673	2.063	2.475	2.900	3.306
2º	0.331	0.838	1.254	1.674	2.072	2.493	2.902	3.31
3º	0.354	0.822	1.225	1.642	2.063	2.482	2.889	3.305
4º	0.381	0.826	1.234	1.652	2.048	2.457	2.832	3.239
5º	0.336	0.822	1.226	1.635	2.028	2.439	2.830	3.225
Media	0.363	0.830	1.2394	1.6552	2.0548	2.4692	2.8706	3.277

Tabla 3: Contadores de tiempo en cada uno de los experimentos para el imán G

	Imán P							
	Contadores de tiempo (segundos) ($\pm 0.001s$)							
Nº de Experimento	1	2	3	4	5	6	7	8
1º	0.307	0.677	1.036	1.398	1.752	2.116	2.468	2.826
2º	0.310	0.678	1.035	1.400	1.751	2.122	2.481	2.842
3º	0.306	0.682	1.048	1.423	1.786	2.158	2.514	2.873
4º	0.332	0.696	1.057	1.423	1.775	2.139	2.490	2.857
5º	0.315	0.682	1.045	1.405	1.775	2.119	2.470	2.837
Media	0.314	0.683	1.044	1.410	1.768	2.131	2.485	2.847

Tabla 4: Contadores de tiempo en cada uno de los experimentos para el imán P

Una vez obtenidos estos datos se está en disposición de calcular la velocidad de cada uno de los imanes al pasar por cada uno de los sensores. Para ello se requiere la variación de distancia correspondiente a la distancia entre los sensores de 9.85 cm aproximadamente, y la variación de tiempo entre sensores, que no es más que la variación de segundos contabilizados de un sensor al siguiente.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Se deben calcular también los errores asociados a las medidas de la velocidad media, que dependen tanto de las medidas de tiempo como de las de posición. A continuación, se expone la formula del error relativo en la velocidad media junto con las estimaciones de cada uno de sus términos, siempre ponderando por encima para estar seguros de las cifras significativas:

$$\frac{E_{v_m}}{v_m} = \sqrt{\left(\frac{E_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{E_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2}$$

$$\frac{E_{\Delta x}}{\Delta x} \sim \frac{0.2 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \sim 0.02 \quad \frac{E_{\Delta t}}{\Delta t} \sim \frac{0.001 \text{ s}}{0.4 \text{ s}} \sim 2.5 \times 10^{-3} \quad v_m \sim 0.3 \text{ m/s}$$

Sustituyendo, obtenemos de error absoluto en la velocidad media:

$$E_{v_m} = v_m \sqrt{\left(\frac{E_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{E_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} \sim 0.006 \text{ m/s}$$

Utilizándose la ecuación anterior y aclarando que la posición “0” se refiere al primer sensor que inicia los contadores, se obtienen los siguientes resultados:

Imán G									
Posición	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Velocidad media(m/s)(± 0.006)	≈ 0	0.271	0.211	0.241	0.237	0.247	0.238	0.245	0.242
Media de las velocidades medias en régimen permanente						0.2420 m/s(± 0.0016)			

Tabla 5: Medida de la velocidad en la posición de cada sensor y velocidad en RP para imán G

Imán P									
Posición	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Velocidad media(m/s) (± 0.006)	≈ 0	0.314	0.267	0.273	0.269	0.275	0.271	0.278	0.273
Media de las velocidades medias en régimen permanente						0.2730 m/s(± 0.0013)			

Tabla 6: Medida de la velocidad en la posición de cada sensor y velocidad en RP para imán P

A la hora del tratamiento de los datos y los cálculos se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

- A la hora de calcular la velocidad media del imán al pasar por cada uno de los sensores se ha supuesto que la velocidad inicial era cero, esta hipótesis no es cierta en el sentido estricto, ya que el imán se deja caer desde una altura por encima del primer sensor, aunque es pequeña hay que tenerla en cuenta y esto puede aumentar la magnitud real de velocidad media dada en el siguiente sensor.
- Hay que añadir que el objeto de estudio del presente trabajo es averiguar una constante de fricción magnética (η) que tienen sentido completo en una situación de régimen permanente, por lo que esté se verá mejor representados en las medidas medias y finales que en la inicial.
- Además de ello hay que añadir que las medidas iniciales también están más expuestas a variar debido a que el imán se deja caer por el tubo manualmente, por lo que esto puede aportarle algún giro o velocidad inicial distinta de cero al imán.

Por estos tres motivos a la hora de calcular la media de las velocidades medias, se ha omitido la velocidad media obtenida de los tres primeros sensores. A continuación, se exponen los resultados gráficamente:

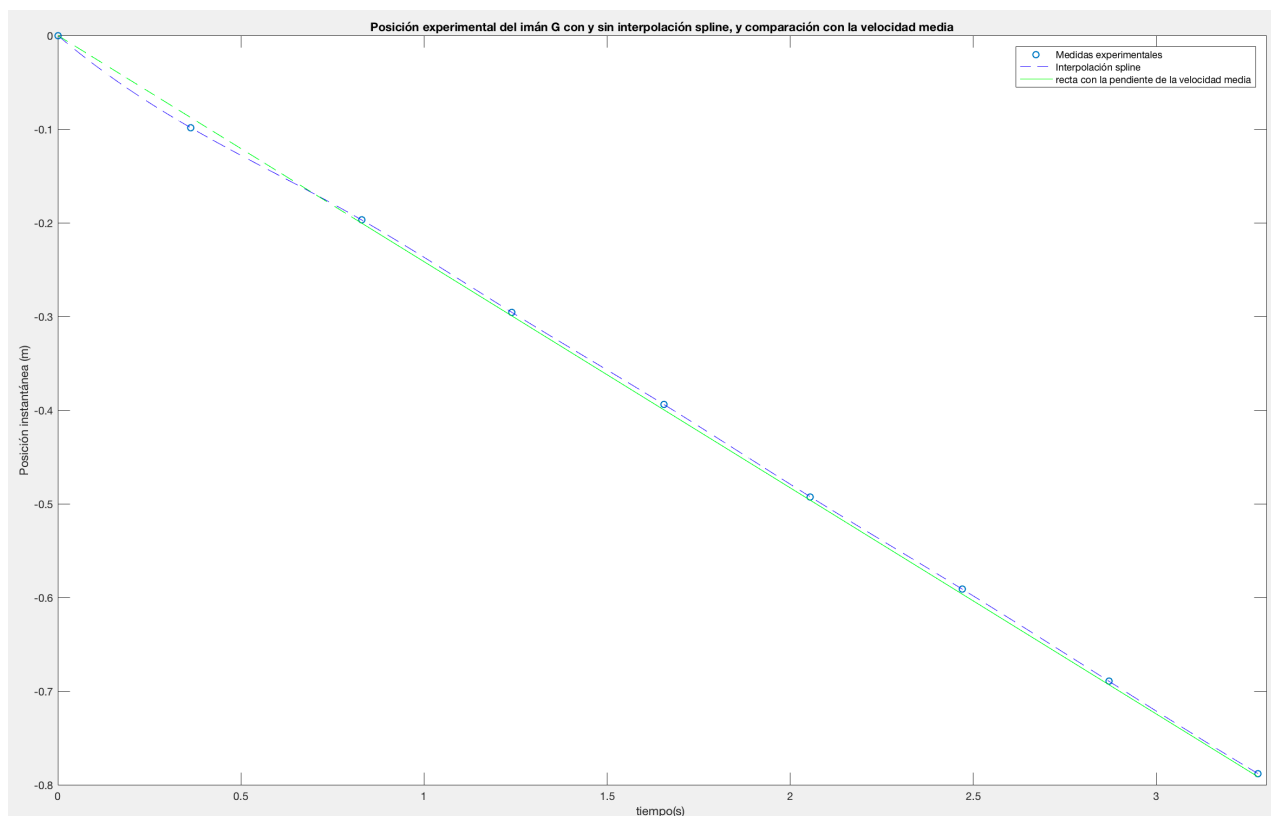


Figura 5-13: Posición instantánea experimental del imán G comparada con una recta de pendiente igual a la velocidad en RP

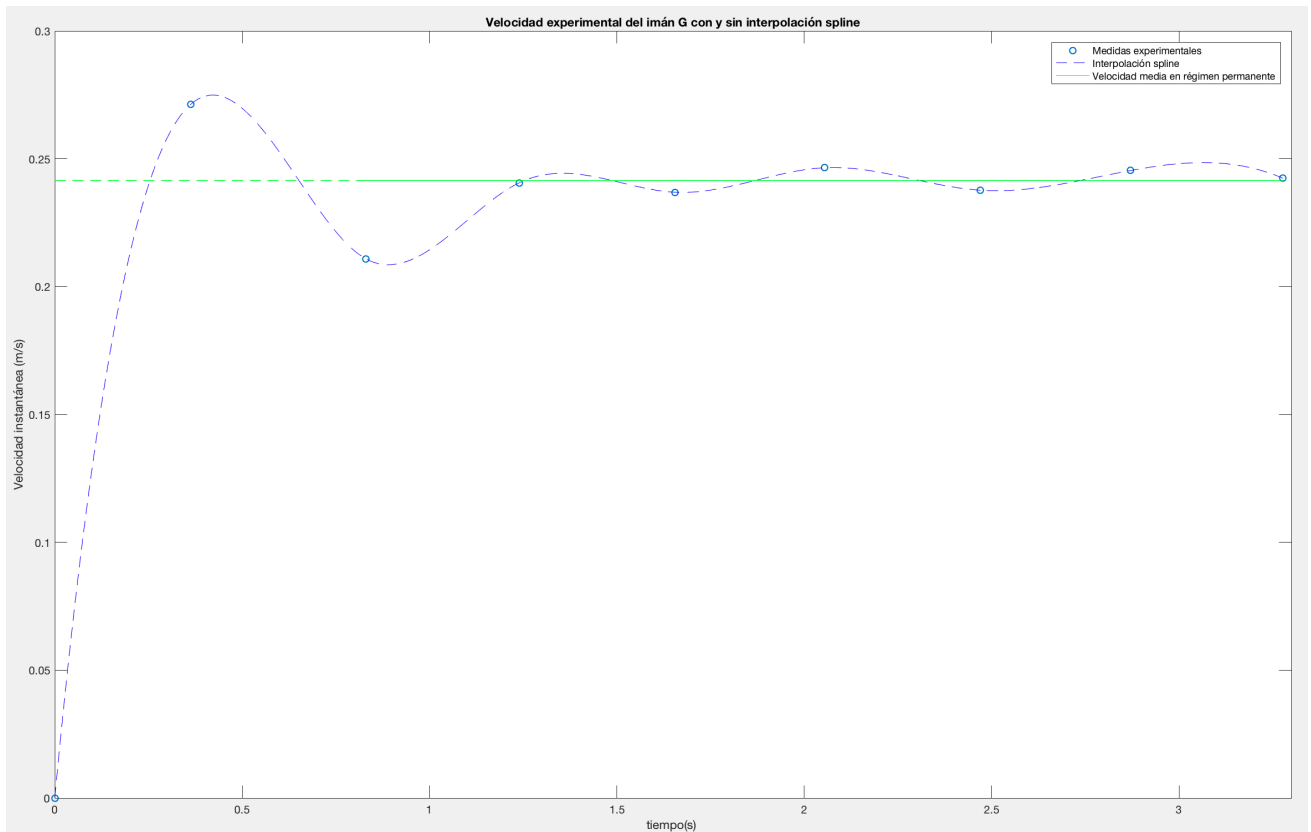


Figura 5-14: Velocidad instantánea experimental del imán G comparada con la velocidad en RP

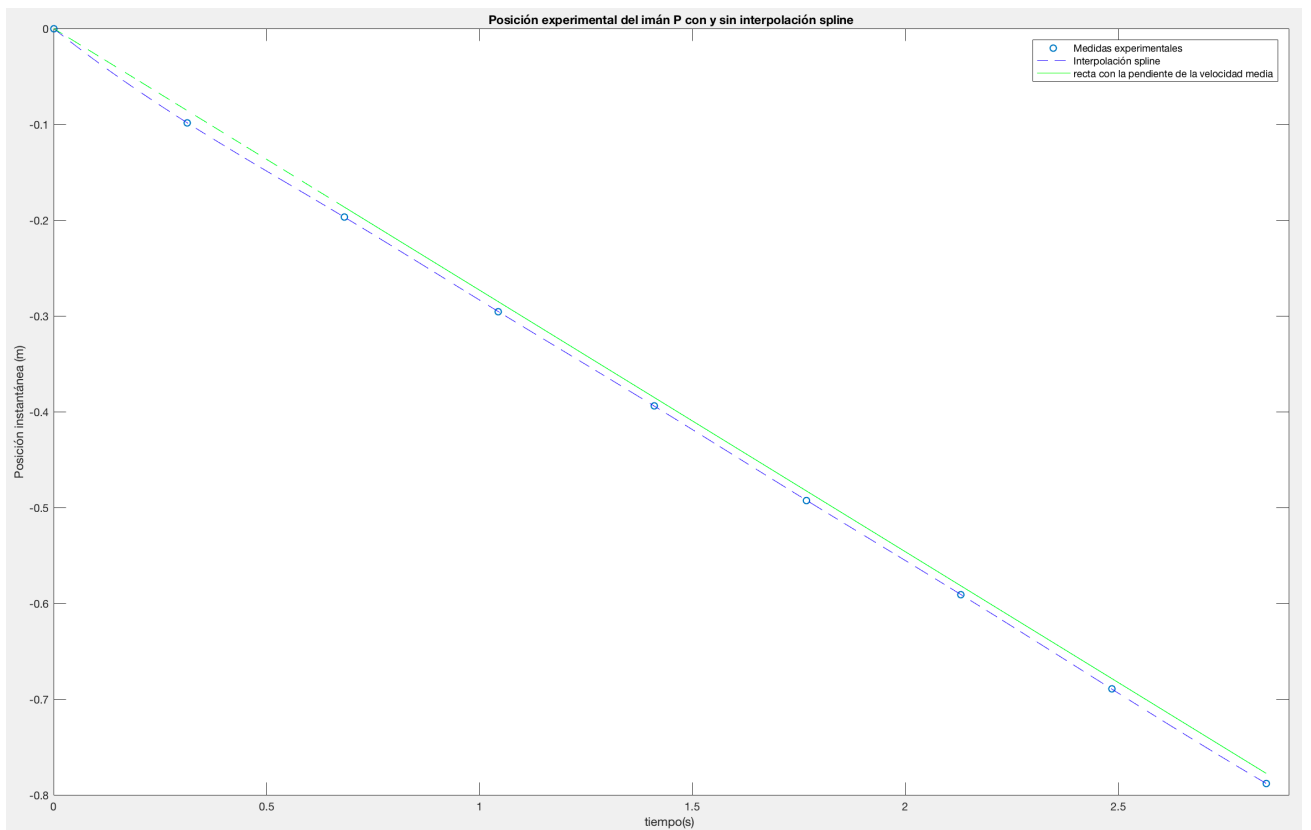


Figura 5-15: Posición instantánea experimental del imán P comparada con una recta de pendiente igual a la velocidad en RP

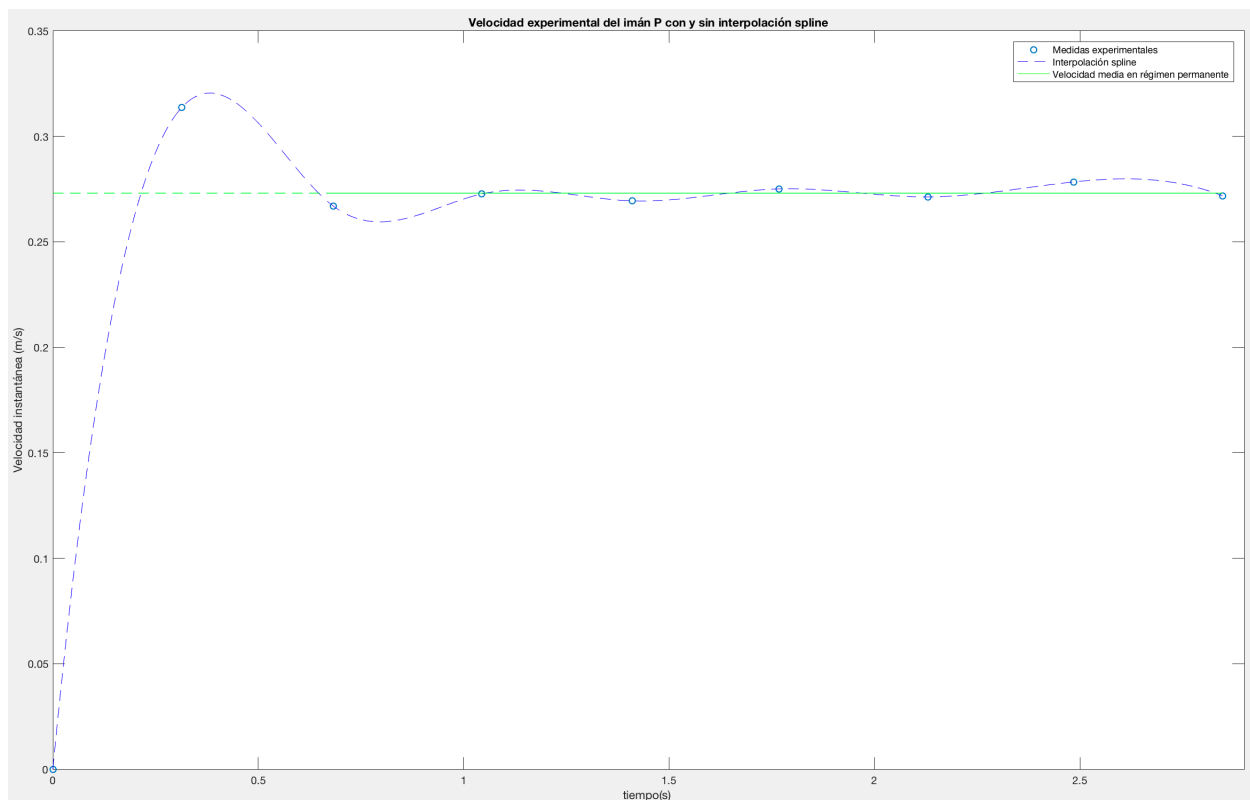


Figura 5-16: Velocidad instantánea experimental del imán P comparada con la velocidad en RP

Como aclaración, la parte de las rectas verdes (relacionadas con la media de las velocidades medias) correspondiente a las tres primeras medidas de los sensores se encuentran en línea discontinua debido a que este tramo no se ha tenido en cuenta a la hora de realizar el cálculo de la media de velocidades medias.

De estas gráficas se pueden sacar las siguientes conclusiones. La posición instantánea $\mathbf{z}(t)$ (en línea discontinua azul generada por una interpolación que pasa por las medidas discretas) en las gráficas de ambos imanes(figuras 5-13 y 5-15) es prácticamente una recta con la misma pendiente que la velocidad media como se puede comparar, siendo representada esta con la recta en color verde, salvo en una pequeña parte inicial, lo que indica que la velocidad es prácticamente constante en todo el recorrido y que dicha velocidad en regimen permanente se alcanza rápidamente.

En cuanto a la velocidad instantánea $\mathbf{v}(t)$ (generada a partir de una interpolación por las medidas discretas de la velocidad) esta presenta un comportamiento subamortiguado en ambos imanes (figuras 5-14 y 5-16), que puede ser debido a que el imán se deja caer desde un extremo del tubo, por lo que no tenga material conductor suficiente encima de él en el que se produzca efecto de atracción. Este efecto también ha podido ser aumentado debido a los errores que previamente se han comentado, y por los que se decidió tomar como hipótesis quitar la medida del primer sensor del calculo de la medida de velocidades medias. Tras este comportamiento subamortiguado inicial se aprecia unas leves oscilaciones en torno a la velocidad calculada en régimen permanente, que pueden deberse al movimiento del imán con respecto al tubo debido a la holgura que existe entre el anillo interior del imán y el radio externo del tubo, que le impide al imán estar perfectamente centrado y con su plano perpendicular al eje del tubo en todo momento. Esto también explicaría el comportamiento más subamortiguado del imán G (también es más

pesado y por lo tanto tiene más inercia) y su posterior oscilación mayor en torno a la velocidad en regimen permanente, ya que el imán G tiene mucha mayor holgura con respect al tubo y por lo tanto más libertad de movimiento. Hay que tener en cuenta que el plano del imán cuanto más alejado esté de la perpendicularidad con respect al eje del tubo, menos Corrientes inducirá en el mismo y por lo tanto menos efecto de frenado magnético experimentará. Esto es un elemento de gran consideración a la hora de evaluar los resultados experimentales obtenidos para compararlos con los modelos teóricos y la validez de sus hipótesis.

Con los datos obtenidos experimentales, y con la la expresión de la velocidad límite partir de la fuerza de frenado obtenida en el capítulo 3 (página 24, sección 3.3.), se puede obtener el coeficiente de fricción magnética η experimental, el cual es el objetivo principal de este proyecto y es el dato con el que compararemos los modelos teóricos.

$$\eta = \frac{mg}{v_{lim}}$$

	Masa(kg) ($\pm 0.0001kg$)	v_{lim} experimental (m/s)	η experimental (kg/s)
Imán G	0.0286	0.2420(± 0.0016)	1.161(± 0.009)
Imán P	0.0057	0.2730(± 0.0013)	0.201(± 0.004)

Tabla 7: Masa, velocidad terminal y η experimentales

5.2 Comparación con los modelos teóricos

El objetivo de este apartado es averiguar la aproximación de los modelos dipolo puntual e imán anular con los resultados experimentales. Hay que destacar que al desconocer la conductividad exacta del tubo metálico de cobre, utilizo una misma conductividad genérica de este material para el tubo en ambos modelos($\sigma = 5.96 \cdot 10^7$ (S/m), esto es debido a que con los datos experimentales de los dos imanes (en este caso particular) no se puede obtener una buena aproximación de la conductividad a pesar de ser el mismo tubo, esto se explicará con más detalle posteriormente. También la gravedad utilizada para la resolución de las ecuaciones de movimiento es exactamente $g = 9.80665$ (m/s²). En el caso del imán P se usa la masa de 5.7 gramos, ya que es la que es la que tienen el imán con el material anteriormente explicado para la correcta activación de los sensores de medida.

La comparación de cada uno de los modelos con el experimental se basará en en el siguiente esquema:

- Explicar las particularidades del modelo en cuestión
- Exponer la gráfica de la velocidad $v(t)$ y una tabla con resultados obtenidos donde se compare el modelo en cuestión con los resultados experimentales, de cada uno de los imanes.
- Comentar la gráfica y la tabla.
- Terminar haciendo un comentario general sobre la aproximación del comportamiento.

5.2.1 Comparación con el modelo dipolo puntual

En esta sección se compararán los resultados experimentales con los obtenidos mediante el modelo del dipolo puntual. Los resultados obtenidos en la tabla correspondientes al modelo del dipolo son los correspondientes a las ecuaciones de la sección 3.3., aclarando que en la tabla donde pone μ en la parte correspondiente al modelo del dipolo puntual, este se calcula con la velocidad límite experimental, para comprobar según este modelo cual debería ser el momento magnético del imán.

5.2.1.1 Caso Imán G

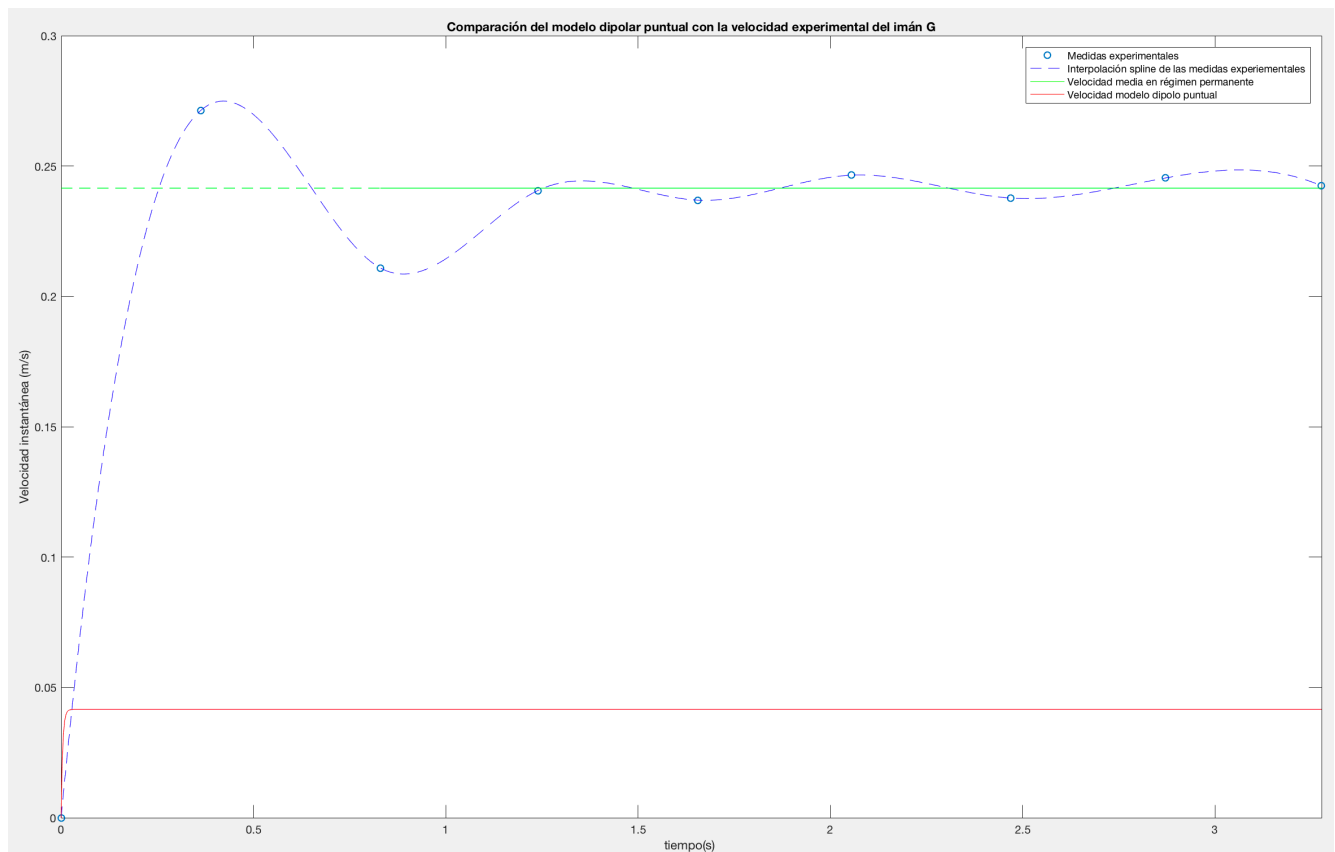


Figura 5-17: Comparación del modelo dipolar puntual con la velocidad experimental del imán G

	μ (A. m ²)	v_{lim} (m/s)	η (kg/s)
Experimental	3.6450	$0.2420(\pm 0.0016)$	$1.161(\pm 0.009)$
Modelo dipolo puntual	1.5123	0.0416	6.7464

Tabla 8: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo dipolo puntual con el imán G

Observando la gráfica, se puede apreciar que el comportamiento obtenido mediante el modelo del momento dipolar es completamente distinto al experimental. Comparando los datos dados en

la gráfica, se puede decir que en general no aproxima nada en ningún parámetro característico del imán G. No hace falta entrar en profundidad en la comparación de estos datos, dado que se aprecia claramente la disparidad existente entre los distintos parámetros.

Estos resultados nos dicen con claridad que el modelo analítico de dipolo puntual cayendo por el centro del tubo, no tiene un comportamiento de las mismas características que el de un imán con la geometría anular del imán G cayendo por fuera del tubo.

5.2.1.2 Caso Imán P

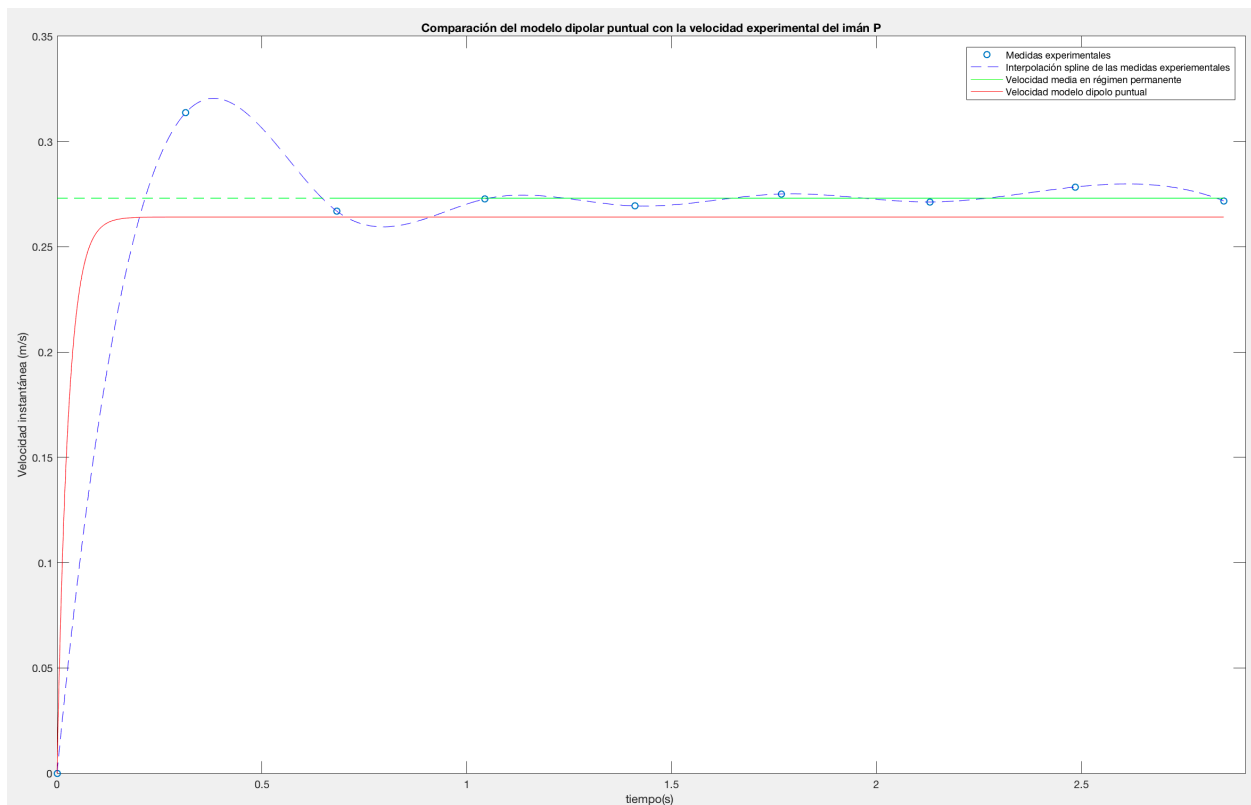


Figura 5-18: Comparación del modelo dipolar puntual con la velocidad experimental del imán P

	μ (A. m ²)	v_{lim} (m/s)	η (kg/s)
Experimental	0.6349	0.2730(± 0.0013)	0.201(± 0.004)
Modelo dipolo puntual	0.6456	0.2641	0.2116

Tabla 9: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo dipolo puntual con el imán P

Observando la gráfica, se puede apreciar que el comportamiento obtenido mediante el modelo dipolo puntual es una muy buena aproximación.

Comparando los datos dados en la tabla, se puede afirmar que los datos son muy próximos entre sí. Analizando los resultados separadamente:

- μ : El momento magnético del imán P calculado a partir del modelo dipolo puntual con la velocidad experimental, es realmente próximo al momento magnético medido experimentalmente. Si comparamos $\mu_{experimental}/\mu_{modelo\ dipolo}$, obtenemos un 98.34% de semejanza. Un resultado bastante sorprendente.
- v_{lim} : En cuanto a las velocidades límites, en este caso la $v_{lim(dipolo)}$ es menor que la $v_{lim(experimental)}$, lo cual se espera en este tipo de modelos en el que se cumplen las hipótesis “ideales”, ya que en el caso real estas no se cumplen, el imán no cae completamente centrado, sin oscilaciones, sin rozamientos con la pared del tubo y el resto de hipótesis que han sido desarrolladas durante el trabajo. Comparando las velocidades se calcula que se llega a una velocidad límite del 96,7% con respecto a la experimental.
- η : El coeficiente de rozamiento que da el modelo es mayor que el experimental por las mismas razones expuestas anteriormente y que también son esperadas (a mayor η , menor v_{lim} , como es lógico). La η experimental es en torno al 95% de la teórica.

Estos resultados nos dicen con gran peso que el modelo analítico de dipolo puntual cayendo por el centro del tubo tiene un comportamiento similar el de un imán de geometría anular del imán P cayendo por fuera del tubo.

5.2.2 Comparación con el modelo de imán anular

El modelo teórico del imán anular como se ha desarrollado se reduce a obtener la fricción magnética η a través de análisis energéticos y a partir de esta constante sustituyéndose en la ecuación de movimiento, podemos obtener el comportamiento de la velocidad y de la posición instantáneas.

La resolución numérica se ha realizado enteramente con el programa MATLAB®. Para ello a la hora de realizar las operaciones, se ha probado a hacer las iteraciones e integraciones con pasos más pequeños y con intervalos más grandes, hasta que la integral final necesaria para obtener η , convergiese y se pudiera estar seguro de que no se estaban obteniendo datos erróneos.

En el caso del paso de integración mediante la función “quadgk” se comprobó que un paso de 0.0001 a otro de 0.00001 no variaba el resultado. En cuanto a los intervalos de integración, ya que estos representan la integración en un tubo infinito en movimiento con un imán quieto (la equivalencia anteriormente mencionada de movimiento relativo del imán quieto y el tubo moviéndose, ya que este al ser infinito simplificaba mucho los cálculos), se comprobó que primero con intervalos del -10 al 10 , posteriormente se fueron reduciendo, hasta llegar a que con un intervalo desde -0.5 al 0.5 convergía a un resultado. Hay que tener en cuenta que todo el código estaba con los parámetros en el sistema internacional, entonces órdenes de un metro para la geometría de los imanes objeto de estudio ya resultaban intervalos suficientemente más que grandes, y también reducían el tiempo de ejecución del programa, que no era corto en ninguno de los casos, por lo que optimizar este tiempo de procesamiento también se trataba de un factor importante.

La η obtenida, a modo de recordatorio, se ha obtenido con la hipótesis de tubo infinito y de espesor despreciable utilizando un radio medio para la integración y la obtención de las variables

5.2.2.1 Caso Imán G

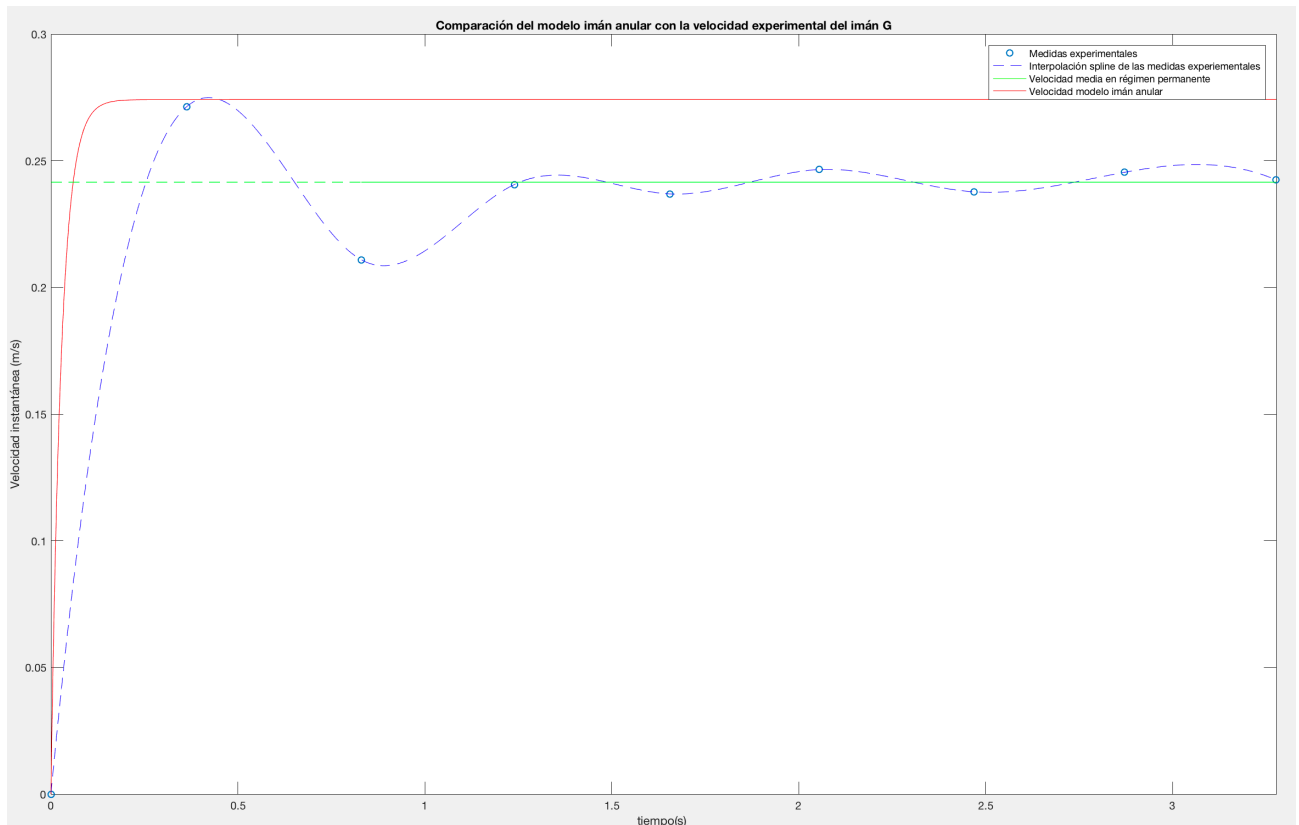


Figura 5-19: Comparación del modelo imán anular con la velocidad experimental del imán G

	η (kg/s)	v_{lim} (m/s)
Experimental	1.161(± 0.009)	0.2420(± 0.0016)
Modelo imán anular	1.0232	0.274

Tabla 10: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo imán anular con el imán G

Como se puede apreciar en la gráfica, el resultado cualitativamente es mucho más parecido al modelo del dipolo anterior. En cuanto los datos de las gráficas:

- **η :** Esta es la constante de fricción que calcula el código. Se puede ver que en este caso la teórica es menor que la experiemetal en contra de lo que se podría esperar. En el último apartado de este capítulo, se profundizará sobre las posibles causas de este comportamiento. Aún así la aproximación esta en un 88.1% con respecto a la experimental.

- v_{lim} : Como se ha deducido antes, en este caso la velocidad experimental es menor que la teórica dada por este modelo. En este caso la experimental supone un 88.32% de la teórica.

En general este modelo aproxima mucho mejor, aunque se obtienen unos resultados un tanto desconcertantes, ya que se espera que la η teórica sea mayor a la experimental, o lo que es lo mismo, que la velocidad límite teórica sea menor que la experimental. Al final de la sección se analizarán estos resultados.

5.2.2.2 Caso Imán P

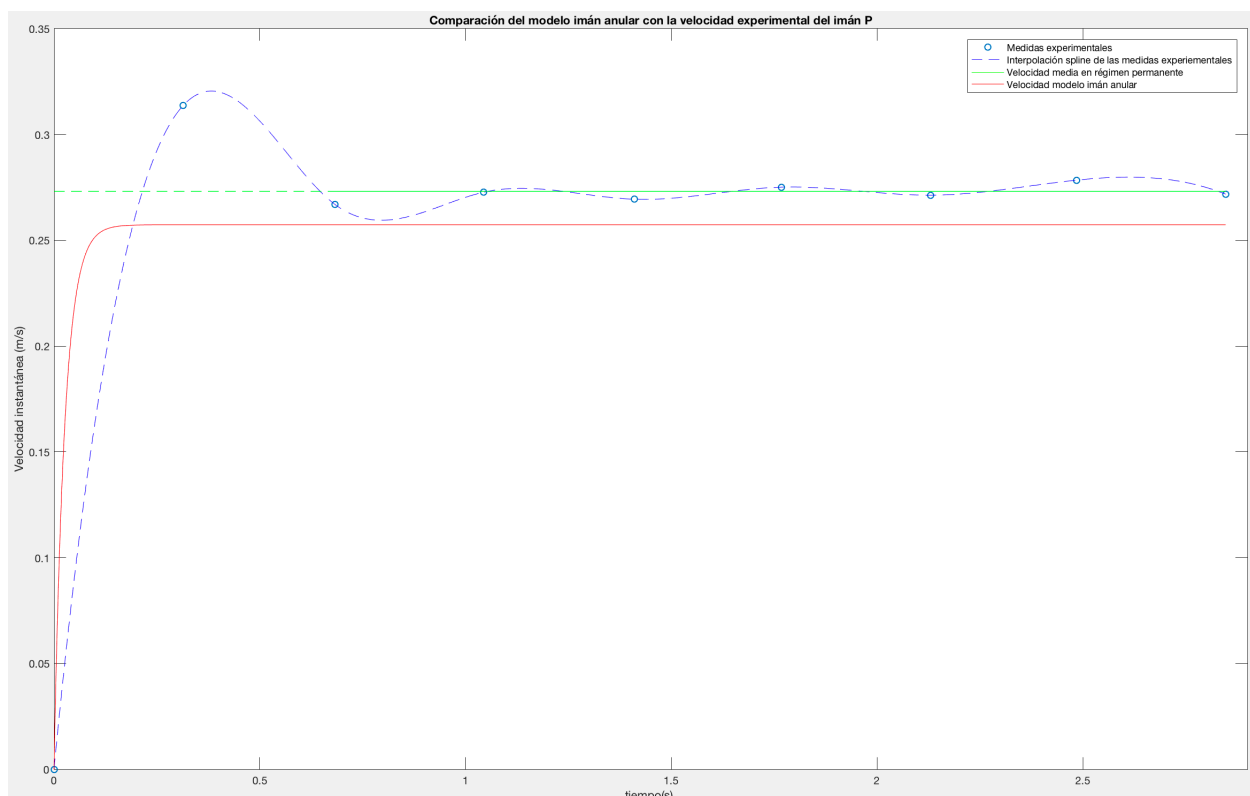


Figura 5-20: Comparación del modelo imán anular con la velocidad experimental del imán P

	$\eta(\text{kg/s})$	$v_{lim}(\text{m/s})$
Experimental	0.201(± 0.004)	0.2730(± 0.0013)
Modelo imán anular	0.21725	0.2573

Tabla 11: Comparación resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos aportados por el modelo imán anular con el imán P

En este caso el modelo teórico parece aproximar al modelo real, aunque si entramos en la comparación de los datos, parece que lo hacer de peor forma que el simple modelo del dipolo puntual:

- v_{lim} : La teórica es menor que la experimental como se esperaba por los motivos anteriormente mencionados. La velocidad calculada numéricamente es un 94,25% de la velocidad experimental. Es una buena aproximación, pero menor que en el caso del dipolo.
- η : En cuanto a la fricción experimental es un 92,57% de la teórica.

5.2.3 Discusión sobre los resultados teóricos frente a los experimentales

Dado los resultados anteriores, parecen confirmar que a pesar de que los dos imanes tienen una geometría anular, los dos tienen un comportamiento muy distinto. Expongo mis hipótesis sobre por qué puede suceder esto.

En cuanto al imán G:

- Dimensiones y holgura: El imán G tiene unas dimensiones mucho mayores a las del imán P, además de mucho mayor peso (5 veces más) y por tanto más inercia en las oscilaciones experimentadas en su movimiento de caída. Dada su geometría es claramente muy distinta a la de un dipolo y no se comportará como este, como se ha visto claramente en su implementación en el modelo dipolo puntual. También la holgura que existe entre el radio interno del imán con respecto al radio externo del tubo, le permite mucha más libertad de movimiento. Aunque es cierto que cuanto más inclinado esté respecto de la posición horizontal, perpendicular a la dirección del tubo conductor, menos fricción magnética tendrá, quizás al inclinarse tanto la fricción con la pared del tubo deje de ser despreciable y acabe convirtiéndose en un factor importante que esté haciendo que la η experimental sea mayor de lo que realmente es, como sucede en el modelo del imán anular. Considero que la hipótesis de que el imán está centrado en su eje y con su plano perpendicular en todo momento no es válida para este imán, y que habría que investigar más acerca del efecto del rozamiento generado al tener tal holgura.

En cuanto al imán P:

- La fuerza magnética y la fuerza del peso: La fuerza magnética que actúa sobre el imán pequeño (imán P) es significativamente menor que la que actúa sobre el grande (imán G). Las fuerzas peso, aunque también es menor en el imán P que en el G, la diferencia entre dichos pesos no es tan significativa como entre las fuerzas de frenado. En consecuencia, en el caso del imán P, el efecto de la fuerza peso es más significativo que el de la fuerza de frenado magnético, por lo que no es tan definitivo el uso del modelo puntual o el de imán anular. Por el contrario, en el caso de imán G, la fuerza magnética sí es más importante, por lo que el modelo utilizado en la misma debe ser más preciso y el de dipolo puntual se queda corto.

- Holgura: El radio interno del imán tiene menos distancia con respecto al tubo, lo que le impide libertad de movimiento, dado que cuanto más se incline el plano del imán respecto al eje del tubo menores corrientes inducidas generará y por tanto menos coeficiente de rozamiento magnético tendrá, y dado que esto está limitado, este efecto puede darse en menor medida en este imán.
- Otra hipótesis radicalmente distinta a la anterior es que las hipótesis tomadas de dipolo puntual junto con la hipótesis de tubo de espesor despreciable funcionen mejor al anularse los errores de ambas mutuamente con respecto a la hipótesis de imán anular y tubo de espesor despreciable.

Comporando ambos, la fuerza magnética que actúa sobre el imán pequeño (imán P) es significativamente menor que la que actúa sobre el grande (imán G). Las fuerzas peso, aunque también es menor en el imán P que en el G, la diferencia entre dichos pesos no es tan significativa como entre las fuerzas de frenado. En consecuencia, en el caso del imán P, el efecto de la fuerza peso es más significativo que el de la fuerza de frenado magnético, por lo que no es tan definitivo el uso del modelo puntual o el de imán anular. Por el contrario, en el caso de imán G, la fuerza magnética si es más importante, por lo que el modelo utilizado en la misma debe ser más preciso y el de dipolo puntual se queda corto.

En cualquier caso, en ambos modelos con el imán P, las η obtenidas son mayores que las experimentales, además de que las aproximaciones son bastante buenas dadas todas las hipótesis simplificadoras utilizadas.

Debido al tan distinto comportamiento que tienen los imanes, a pesar de tener una geometría anular ambos, no se ha podido obtener una medida razonable de la conductividad del tubo de cobre (dato el cual no se disponía) a pesar de haberse utilizado el mismo tubo para los dos imanes.

Para futuros análisis de este fenómeno, se considera que se deben realizar con distintos imanes que tengan la misma holgura con respecto al tubo, como una forma sencilla de evitar que se generen comportamientos tan distintos en imanes que aparentemente deberían comportarse de una forma similar.

6 CONCLUSIONES

“Cada día sabemos más y entendemos menos”

- Albert Einstein -

El **Capítulo 1** ha comenzado con una breve introducción al fenómeno del frenado magnético y a las causas que lo generan. Después se ha explicado que este fenómeno puede ser no deseado y se pretenda evitar o minimizar, o pueda ser de utilidad, dándose algunos ejemplos de sus aplicaciones. Posteriormente se ha expuesto el sistema de estudio en el que se va a analizar el efecto de frenado magnético. A continuación, se ha hecho un repaso histórico del electromagnetismo haciendo hincapié en que la electricidad y magnetismo se estudiaban como ciencias distintas hasta hace relativamente poco, hasta que ambas ciencias se unificaron, dada la relación tan íntima existente entre ambos fenómenos. Como parte fundamental de este capítulo, se han expuesto los fundamentos teóricos, los cuales son vitales para la correcta comprensión del trabajo, explicando las ecuaciones fundamentales para tratar el fenómeno de estudio: la ecuación de Ampère-Maxwell, la ecuación de Faraday-Maxwell o la Ley de Ohm, y conceptos importantes necesarios para el trabajo como el de dipolo puntual, su momento magnético, el concepto de imanación, la fuerza electromotriz, el flujo magnético o el tan usado en el trabajo, el potencial vector \vec{A} .

En el **Capítulo 2** se ha obtenido el potencial vector magnético \vec{A} de los distintos modelos teóricos que desarrollados en el trabajo, utilizando distribuciones de corriente eléctrica que generen el campo magnético equivalente al modelo de imán buscado: el modelo dipolo puntual (espira de corriente), el modelo de imán con volumen (cinta de corriente), el modelo de imán anular (superposición de dos cintas de corriente), todos ellos bajo la hipótesis de que el tubo es infinito. Se calcula también el potencial vector \vec{A} para un imán anular cayendo en un tubo finito, modelo el cual se propone como una siguiente aproximación al problema, ya que no se resolverá numéricamente en este trabajo. En el final de este capítulo, se exponen las hipótesis simplificadoras realizadas en cuanto al tubo metálico conductor por el cual cae el imán de estudio.

En el **Capítulo 3** se analiza el modelo de un dipolo puntual cayendo por el centro de un tubo metálico conductor. Se calcula la expresión analítica de la fuerza magnética que produce el frenado del imán, demostrándose que es análoga a una fuerza de rozamiento de tipo viscoso, por lo que puede ser completamente caracterizada mediante una constante de rozamiento que denominamos η . Además, se obtiene la expresión de dicho coeficiente en términos de las propiedades geométricas y las características físicas de los medios materiales que componen el sistema bajo estudio. A continuación, se formula y resuelve la ecuación de movimiento del dipolo magnético puntual. Finalmente, se plantea la hipótesis de que, si en vez de un dipolo puntual se tiene una sustancia magnetizada con geometría no puntual, el fenómeno no debe ser distinto y también se debe de poder modelar el fenómeno de frenado magnético mediante un coeficiente de rozamiento *magnético* η , similar al del caso de dipolo puntual. Esta hipótesis, que se aplicará para el desarrollo del análisis llevado a cabo en el Capítulo 4, se ve corroborada (en primera aproximación) por los resultados experimentales que se exponen y analizan en dicho capítulo.

En el **Capítulo 4** se desarrolla el modelo del imán anular cayendo en un tubo infinito que había sido introducido con su potencial vector \vec{A} en el capítulo 2. En este caso la obtención del coeficiente de rozamiento *magnético* η se hace mediante el análisis de los aspectos energéticos del fenómeno bajo estudio. Dicho procedimiento presenta una formulación más simple que la asociada al cálculo directo de la fuerza magnética ejercida sobre el imán anular por el campo magnético creado por las corrientes inducidas en el tubo conductor, tal como se hizo en el caso del modelo de dipolo magnético puntual. Básicamente, el procedimiento de análisis se basa en identificar la potencia desarrollada por la fuerza de frenado magnético con la energía que por unidad de tiempo se disipa en el sistema por efecto Joule, debido a las corrientes inducidas en el tubo conductor. Aplicando este análisis de dos formas distintas, se obtiene la misma expresión de la η . El capítulo finaliza haciendo el mismo análisis para el caso del tubo finito, obteniéndose la expresión de η .

En el **Capítulo 5** se ha realizado la parte experimental del trabajo. Se comienza exponiendo los dos imanes utilizados: el imán G y el imán P. A continuación se realizan las medidas de la geometría y masa de los imanes y del tubo, con la estimación de sus errores asociados. Después se calcula el campo magnético de cada uno de los imanes, explicando el sistema de medida utilizado y el programa para la obtención experimental de su momento magnético μ . La siguiente medida que se realiza es la del tiempo de caída, igualmente explicando el sistema de medida y las hipótesis tomadas en los cálculos de las velocidades medias, todo ello también teniendo en cuenta los errores asociados, exponiéndose finalmente las gráficas experimentales de la posición y velocidad. Para terminar, se llega al punto clave del trabajo, que es la comparación de los datos experimentales con los modelos teóricos. Para ello se utiliza el programa MATLAB® para la obtención de los datos de forma numérica y para hacer las gráficas. En el caso de cada imán, se compara el modelo dipolo puntual y el modelo imán anular con los datos experimentales mediante gráficas superpuestas y tablas comparativas de los datos para poder discutir la aproximación que han realizado cada uno de los modelos. También se han analizado los aspectos numéricos del trabajo a fin de poder asegurar, en la medida de lo posible, de que los calculo realizados proporcionan resultados con una precisión adecuada. En este sentido, también se ha procurado realizar el necesario cálculo de errores para los valores medidos o calculados de las magnitudes físicas implicadas.

Del análisis de las comparaciones entre resultados experimentales y teóricos proporcionados por los diferentes modelos, se derivan propuestas de posibles líneas de continuación del trabajo, tanto para comprobar las hipótesis que podrían explicar los desacuerdos entre dichos resultados, como para intentar mejorar su concordancia. Fundamentalmente, dichas líneas tienen que ver con la introducción de modelos físicos más completos o que se aproximen más al sistema real. Por ejemplo, considerando que el tubo conductor tiene longitud finita; teniendo en cuenta que las corrientes inducidas se distribuyen en el volumen del tubo (espesor no despreciable), o considerando que los imanes anulares en su caída adoptan una posición oblicua respecto del plano perpendicular al eje del tubo.

REFERENCIAS

- [1] Y. Xia, S. Yan and H. Tan, "Study of Eddy Current Brake Based on Motion of Permanent Magnet" Tianjin, NO.1 High School, pp. 29-30. [Online] Available: <https://studylib.net/doc/18737927/study-of-eddy-current-brake-based-on-motion-of-permanent-...>
- [2] Asociación Nacional de Estudiantes Universitarios de Ciencias Físicas "Una breve historia del electromagnetismo" Y. Catalayud Borrás (2019, Octubre) [Online] Available: <https://nusgrem.es/una-breve-historia-del-electromagnetismo/>
- [3] Wikipedia The free encyclopedia. (2019, Septiembre) Michael Faraday. [Online] Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday
- [4] A. García-Agúndez Blanco, "Analytical study of a hovering magnetic system (Levitron)" pp. 21 [Online] Available: http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/91297/fichero/TFG_AGAB.pdf
- [5] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. "Ley de Faraday (GIE)". [Online] Available: [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Faraday_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Faraday_(GIE))
- [6] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. "Dipolo magnético". [Online] Available: http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo_magn%C3%A9tico
- [7] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. "Magnetización". [Online] Available: <http://laplace.us.es/wiki/index.php/Magnetizaci%C3%B3n>
- [8] Marcelo Rodríguez Danta, Antonio González Fernández, Consuelo Bellver Cebreros. "Campos electromagnéticos". 2a edición. Universidad de Sevilla, 1996
- [9] Wikipedia The free encyclopedia. (2019, Junio) Flujo magnético. [Online] Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Flujo_magnético
- [10] Física con ordenador "Espiras en un campo magnético variable con el tiempo (I)". [Online] Available: <http://laplace.ucv.cl/Cursos/Old/fisica/electromagnet/induccin/variable/variable.htm#La%20inducci%C3%B3n%20electromagn%C3%A9tica>
- [11] Física con ordenador "Movimiento de un imán en un tubo metálico vertical". [Online] Available: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/induccin/foucault1/foucault1.htm> (dipolo en tubo)
- [12] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. "Ley de Ohm (GIE)". [Online] Available: [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Ohm_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Ohm_(GIE))

- [13] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “Ley de Gauss para el campo magnético”. [Online] Available:
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Gauss_para_el_campo_magn%C3%A9tico
- [14] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “Potencial vector magnético”. [Online] Available:
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Potencial_vector_magn%C3%A9tico
- [15] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “Campo magnético de una espira circular”. [Online] Available:
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_magn%C3%A9tico_de_una_espira_circular
- [16] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “Campo de un solenoide cilíndrico”. [Online] Available:
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_de_un_solenoid_cil%C3%ADndrico#En_el_centro
- [17] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “Imán en forma de tubo”
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Im%C3%A1n_en_forma_de_tubo
- [18] C.Figueroa, Magnetic brakes ”When a strong magnet falls down a non ferromagnetic metal tube, it will experience a retarding force. Investigate the phenomenon.” [Online] Available:
<https://slideplayer.com/slide/2817274/>
- [19] Física con ordenador “Caída de un imán”. [Online] Available:
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/induccio/iman/iman.htm>
- [20] Física con ordenador “Demostración de la ley de Faraday”. [Online] Available:
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/fem/faraday/faraday.html>
- [21] Electric and Magnetic Fields from a Circular Coil Using Elliptic Integrals (2007, Octubre)
[Online] Available:
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.525.3415&rep=rep1&type=pdf>
- [22] Supermagnete, “How do you calculate the magnetic flux density?”, ”Formula for ring magnet flux density”. [Online] Available: <https://www.supermagnete.de/eng/faq/How-do-you-calculate-the-magnetic-flux-density>
- [23] Supermagnete, “Physical Magnet Data”. [Online] Available:
<https://www.supermagnete.de/eng/physical-magnet-data>

7 ANEXO

Tabla 12: Tabla completa de medidas experimentales del campo magnético del imán G

z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)
0	80.2		38	-6.8		76	-1.4
1	69.5		39	-6.5		77	-1.3
2	61.3		40	-6.2		78	-1.3
3	46.9		41	-5.9		79	-1.2
4	35.5		42	-5.5		80	-1.2
5	26.1		43	-5.4		81	-1.1
6	18		44	-5.1		82	-1.1
7	9.3		45	-4.8		83	-1
8	3.1		46	-4.6		84	-1
9	-1.9		47	-4.4		85	-1
10	-6.5		48	-4.1		86	-1
11	-10.4		49	-4		87	-0.8
12	-12.7		50	-3.8		88	-0.8
13	-14.6		51	-3.6		89	-0.8
14	-15.9		52	-3.4		90	-0.8
15	-16.7		53	-3.3		91	-0.8
16	-17.1		54	-3.2		92	-0.7
17	-17.3		55	-3		93	-0.7
18	-17.1		56	-2.9		94	-0.7
19	-16.9		57	-2.8		95	-0.7
20	-16.5		58	-2.6		96	-0.7
21	-15.9		59	-2.5		97	-0.6
22	-15.4		60	-2.5		98	-0.6
23	-14.8		61	-2.2		99	-0.6
24	-14.2		62	-2.2		100	-0.6
25	-13.6		63	-2.1		101	-0.6
26	-12.8		64	-2.1		102	-0.5
27	-12.2		65	-1.9		103	-0.5
28	-11.5		66	-1.9		104	-0.5
29	-11.1		67	-1.8		105	-0.5
30	-10.5		68	-1.8		106	-0.5
31	-9.9		69	-1.7		107	-0.5
32	-9.4		70	-1.7		108	-0.5
33	-8.9		71	-1.6		109	-0.5
34	-8.5		72	-1.6		110	-0.5
35	-8		73	-1.5		111	-0.5
36	-7.6		74	-1.5		112	-0.4
37	-7.2		75	-1.4		113	-0.4

z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)
114	-0.4		154	-0.1		194	-0.1
115	-0.4		155	-0.1		195	-0.1
116	-0.4		156	-0.1		196	-0.1
117	-0.4		157	-0.1		197	-0.1
118	-0.4		158	-0.1		198	-0.1
119	-0.4		159	-0.1		199	-0.1
120	-0.4		160	-0.1		200	-0.1
121	-0.4		161	-0.1		201	-0.1
122	-0.3		162	-0.1		202	0
123	-0.3		163	-0.1			
124	-0.3		164	-0.1			
125	-0.3		165	-0.1			
126	-0.3		166	-0.1			
127	-0.3		167	-0.1			
128	-0.3		168	-0.1			
129	-0.3		169	-0.1			
130	-0.3		170	-0.1			
131	-0.3		171	-0.1			
132	-0.2		172	-0.1			
133	-0.2		173	-0.1			
134	-0.2		174	-0.1			
135	-0.2		175	-0.1			
136	-0.2		176	-0.1			
137	-0.2		177	-0.1			
138	-0.2		178	-0.1			
139	-0.2		179	-0.1			
140	-0.2		180	-0.1			
141	-0.2		181	-0.1			
142	-0.2		182	-0.1			
143	-0.2		183	-0.1			
144	-0.2		184	-0.1			
145	-0.2		185	-0.1			
146	-0.2		186	-0.1			
147	-0.2		187	-0.1			
148	-0.2		188	-0.1			
149	-0.2		189	-0.1			
150	-0.2		190	-0.1			
151	-0.2		191	-0.1			
152	-0.1		192	-0.1			
153	-0.1		193	-0.1			

Tabla 13: Tabla completa de medidas experimentales del campo magnético del imán P

z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)
0	31.5		38	-1.6		76	-0.4
1	25		39	-1.5		77	-0.4
2	17.9		40	-1.4		78	-0.4
3	13		41	-1.4		79	-0.4
4	7.3		42	-1.3		80	-0.4
5	3.2		43	-1.3		81	-0.4
6	-0.3		44	-1.2		82	-0.4
7	-3		45	-1.1		83	-0.4
8	-4.5		46	-1.1		84	-0.4
9	-5.9		47	-1.1		85	-0.4
10	-6.6		48	-1		86	-0.4
11	-7.1		49	-1		87	-0.4
12	-7.2		50	-0.9		88	-0.4
13	-7.1		51	-0.9		89	-0.4
14	-6.9		52	-0.9		90	-0.3
15	-6.7		53	-0.8		91	-0.3
16	-6.4		54	-0.8		92	-0.3
17	-6.1		55	-0.7		93	-0.3
18	-5.6		56	-0.7		94	-0.3
19	-5.3		57	-0.7		95	-0.3
20	-5		58	-0.7		96	-0.3
21	-4.7		59	-0.7		97	-0.3
22	-4.4		60	-0.7		98	-0.3
23	-4.1		61	-0.6		99	-0.3
24	-3.8		62	-0.6		100	-0.3
25	-3.6		63	-0.6		101	-0.3
26	-3.4		64	-0.6		102	-0.3
27	-3.1		65	-0.6		103	-0.3
28	-2.9		66	-0.6		104	-0.3
29	-2.7		67	-0.5		105	-0.3
30	-2.6		68	-0.5		106	-0.3
31	-2.4		69	-0.5		107	-0.3
32	-2.3		70	-0.5		108	-0.3
33	-2.1		71	-0.5		109	-0.3
34	-2		72	-0.5		110	-0.3
35	-1.9		73	-0.5		111	-0.3
36	-1.8		74	-0.5		112	-0.3
37	-1.7		75	-0.4		113	-0.3

z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)		z(mm)	B(mT)
114	-0.3		154	-0.2		193	-0.1
115	-0.3		155	-0.2		194	-0.1
116	-0.3		156	-0.2		195	-0.1
117	-0.3		157	-0.2		196	-0.1
118	-0.3		158	-0.2		197	-0.1
119	-0.3		159	-0.2		198	-0.1
120	-0.25		160	-0.1		199	-0.1
121	-0.25		161	-0.1		200	0
122	-0.25		162	-0.1			
123	-0.25		163	-0.1			
124	-0.25		164	-0.1			
125	-0.25		165	-0.1			
126	-0.25		166	-0.1			
127	-0.25		167	-0.1			
128	-0.25		168	-0.1			
129	-0.25		169	-0.1			
130	-0.2		170	-0.1			
131	-0.2		171	-0.1			
132	-0.2		172	-0.1			
133	-0.2		173	-0.1			
134	-0.2		174	-0.1			
135	-0.2		175	-0.1			
136	-0.2		176	-0.1			
137	-0.2		177	-0.1			
138	-0.2		178	-0.1			
139	-0.2		179	-0.1			
140	-0.2		180	-0.1			
141	-0.2		181	-0.1			
142	-0.2		182	-0.1			
143	-0.2		183	-0.1			
144	-0.2		184	-0.1			
145	-0.2		185	-0.1			
146	-0.2		186	-0.1			
147	-0.2		187	-0.1			
148	-0.2		188	-0.1			
149	-0.2		189	-0.1			
150	-0.2		190	-0.1			
151	-0.2		191	-0.1			
152	-0.2		192	-0.1			
153	-0.2		193	-0.1			
